Module préparatoire au BTS

NOMBRES COMPLEXES

I) Forme algébrique des nombres complexes

1) Définition

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ dont les éléments, appelés **nombres complexes**, sont de la forme :

$$z = a + jb$$

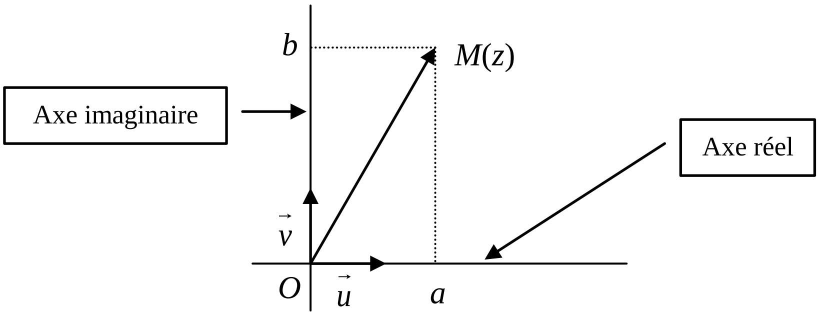
où *a et* b sont des nombres réels et j² = -1.
a est la **partie réelle** et *b* est la **partie imaginaire**.

L'écriture *z* = *a* + *jb* est appelée **forme algébrique** de *z*.

2) Représentation graphique

Dans le plan muni d'un repère, le nombre complexe $z = a + jb$ est représenté par le point *M* de coordonnées *(a, b)* ou le vecteur: $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

On dit que *M* **est l'image de** *z* ou que *z* **est l'affixe de** *M*.



II) Égalité et conjugué

1) Égalité

Deux nombres complexes $z_1 = a_1 + jb_1$ et $z_2 = a_2 + jb_2$ sont égaux s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire : $z_1 = z_2$ alors $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$
En particulier : si $z = a + jb = 0$, alors $a = b = 0$

2) Conjugué

Si $z = a + jb$, le nombre $a - jb$ est appelé conjugué de *z* et est noté $\overline{z}$.

$$z = a + jb \Leftrightarrow \overline{z} = a - jb$$

On remarque que $\overline{\left(\overline{z}\right)} = z$.

III) Opérations

On admet que les règles de calcul pour l'addition et la multiplication sont les mêmes dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$ (en utilisant $j^2 = -1$).

1) Somme

$$\text{Si } z = a + jb \text{ et } z' = a' + jb',\ \text{alors } z + z' = (a + a') + j(b + b').$$

2) Produit

$$\text{Si } z = a + jb \text{ et } z' = a' + jb',\ \text{alors } zz' = (aa' - bb') + j(ab' + ba').$$

3) Inverse et quotient

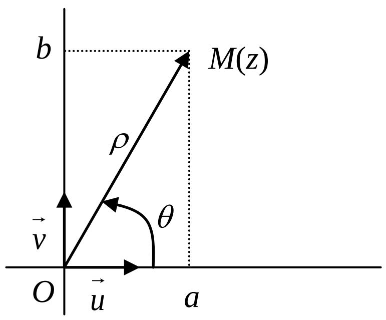
L'inverse d'un nombre complexe z, noté $\frac{1}{z}$, peut être mis sous la forme $a + jb$ en utilisant le conjugué : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$

Il en est de même pour le quotient de deux nombres complexes z et z' (z' non nul) : $\frac{z}{z'} = \frac{z\,\bar{z}'}{z'\bar{z}'}$

IV) Forme trigonométrique

1) Module

Dans un plan de repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, soit un point M et son affixe $z = a + jb$. La norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$



On appelle **module** de z le nombre réel positif : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Le module peut aussi être désigné par les lettres ρ ou r. On remarque que :

$$z\bar{z} = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 \text{ d'où } z\bar{z} = |z|^2$$

2) Argument

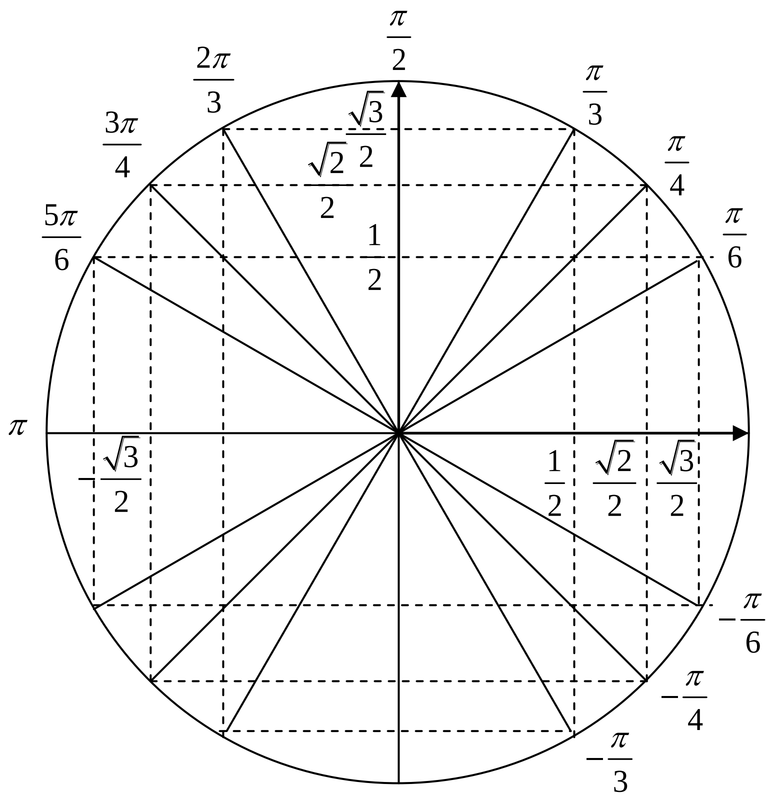
On appelle **argument** de z, pour $z \neq 0$, et on note **arg z,** une mesure à 2π près de l'angle θ.

$$\arg z = \theta,\ \text{avec } \cos\theta = \frac{a}{\rho} \text{ et } \sin\theta = \frac{b}{\rho}$$

<u>Remarques</u>

- Le nombre $z = 0$ n'a pas d'argument car θ n'est pas défini.
- Le tableau ci-dessous donne les valeurs trigonométriques exactes des angles remarquables.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



3) <u>Forme trigonométrique d'un nombre complexe</u>

La forme trigonométrique d'un nombre complexe est : $z = \rho\left(\cos\theta + j\sin\theta\right)$.

j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$: $j = \left[1, \ \frac{\pi}{2}\right]$.

EXERCICE D'APPLICATION A L'ELECTRICITE

Sur le circuit électronique d'un thermostat, on peut visualiser, à l'aide d'un oscilloscope, deux tensions sinusoïdales définies en fonction du temps par :

$$u_1 = 4\sin(100\pi t) \qquad \text{et} \qquad u_2(t) = u_2 = \sqrt{8}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

On s'intéresse à la tension $u(t)$ définie à l'instant t par $u(t) = u_2(t) - u_1(t)$.

On associe aux tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ d'affixes respectives $z_1 = 4$ et $z_2 = 2 + 2\mathrm{j}$, où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

1) **Représenter** le vecteur $\vec{v_1}$ d'affixe z_1 et le vecteur $\vec{v_2}$ d'affixe z_2 dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) ci-dessous.

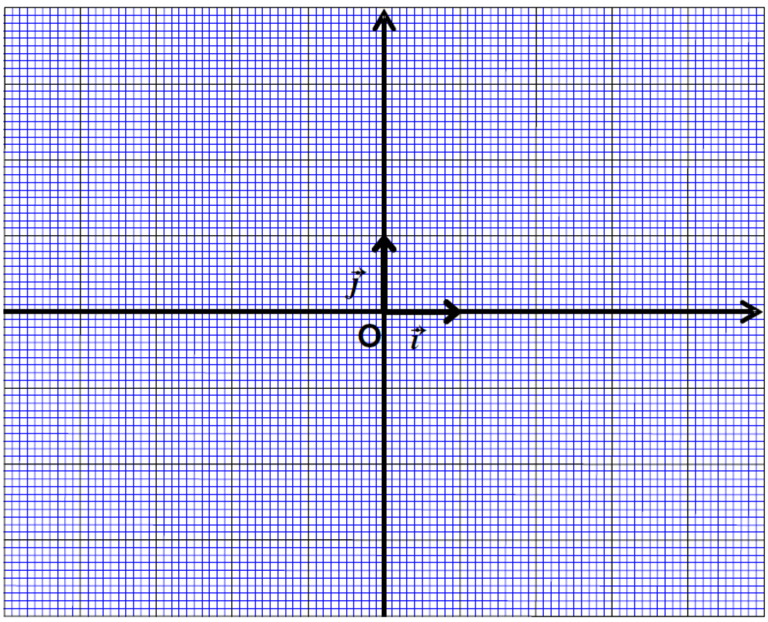
2) On note z l'affixe du vecteur $\vec{v}$ associé à la tension sinusoïdale $u(t)$.
Donner l'expression de l'affixe z sachant que $z = z_2 - z_1$.

3) **Représenter** le vecteur $\vec{v}$ sur le papier millimétré.

4) **Déterminer** la valeur exacte du module ρ de z.

5) L'argument φ de z est la mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{v})$.
Parmi les 3 propositions suivantes : $3\pi/4$, $7\pi/4$ et $9\pi/4$, **indiquer** celle qui correspond à φ.

6) À l'instant t, la tension $u(t)$ peut s'écrire : $u(t) = \rho\sin(100\pi t + \varphi)$.
À l'aide des résultats des questions 4 et 5, **exprimer** la tension $u(t)$.



(D'après sujet de Bac Pro 2011)