*Dans le cadre de la conception d'un circuit à modulation de longueur d'impulsion, on étudie le spectre d'un signal porteur en dent de scie.*

## Exercice 1

### Partie A : Calcul des coefficients de Fourier et développement en série de Fourier

On considère la fonction $f$, périodique de période $T$,

définie sur $\left]-\frac{T}{2}\,;\,\frac{T}{2}\right]$ par : $\boldsymbol{f(x) = \frac{T}{2} - x}$

Le développement en série de Fourier de la fonction $f$ est noté :

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [\, a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\,]$$

$$avec\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

On rappelle les résultats suivants :

Pour $n \geqslant 1$ :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\omega x)\,\mathrm{d}x}$$

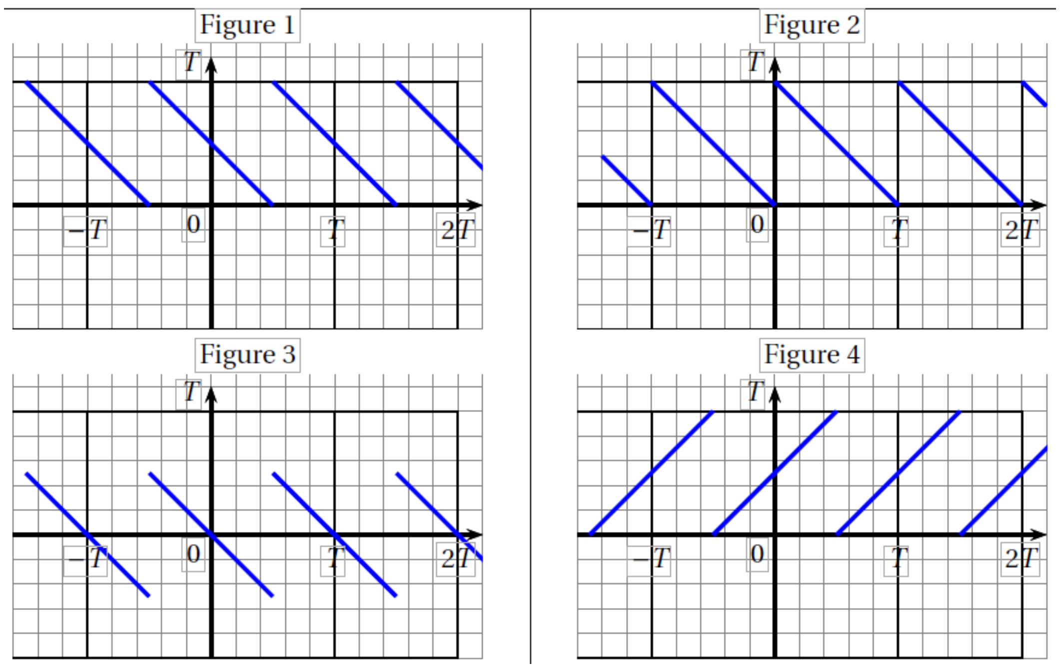
$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\omega x)\,\mathrm{d}x}$$

**1.** Compléter le tableau de valeurs de $f$ sur le document réponse.

**Partie A 1.**

| $x$ | $-\frac{T}{4}$ | $0$ | $\frac{T}{4}$ | $\frac{T}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | |

**2.** La fonction $f$ est représentée sur une des figures suivantes.
Laquelle ? Justifier.




**Justification:**

*Dans le cadre de la conception d'un circuit à modulation de longueur d'impulsion, on étudie le spectre d'un signal porteur en dent de scie.*

# Exercice 1 (Suite)

## Partie A : Calcul des coefficients de Fourier et développement en série de Fourier

À partir de la question **3.** et jusqu'à la fin de l'exercice, on prend $T = 2$.
Ainsi on a : $f(x) = 1 - x$ sur $]-1\,;\,1]$ et $f$ périodique de période 2.

**3.** Déterminer par la méthode de votre choix, que l'on indiquera, la valeur moyenne $a_0$ de $f$.

**4.** On s'intéresse maintenant aux coefficients $a_n$ et $b_n$ ($n \geqslant 1$) du développement en série de Fourier de $f$.
Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants, qui sont admis et n'ont pas à être démontrés :

| ▶ T | |
|---|---|
| 1 | $a_n$ := Intégrale((1-x)*cos(n*pi*x), x, −1, 1) <br> $\rightarrow a_n := 2\cdot\dfrac{\sin(n\pi)}{n\pi}$ |
| 2 | $b_n$ := Intégrale((1-x)*sin(n*pi*x), x, −1, 1) <br> $\rightarrow b_n := \dfrac{2n\pi\cos(n\pi) - 2\sin(n\pi)}{n^2\pi^2}$ |

**a.** Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n = 0$.

$$a_n = 2.\frac{\sin(\boldsymbol{n\omega})}{\boldsymbol{n\pi}}$$

**b.** Simplifier, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'expression de $b_n$.

$$b_n = \frac{2n\pi\cos(n\pi)\ - 2\sin(n\pi)}{n^2\pi^2}$$

*Dans le cadre de la conception d'un circuit à modulation de longueur d'impulsion, on étudie le spectre d'un signal porteur en dent de scie.*

# Exercice 1 (Suite)

## Partie A : Calcul des coefficients de Fourier et développement en série de Fourier

**5.** On s'intéresse aux valeurs de $b_n$ pour $n$ allant de 1 à 5.

Compléter le tableau du document réponse.

**Partie A 5.**

Arrondir les résultats à $10^{-3}$.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_n$ | | | | | |

**6.** On note $s_n(x)$ le développement de Fourier de la fonction $f$ à l'ordre $n$, c'est à dire la somme de la composante continue $a_0$ et des $n$ premières harmoniques de $f$, soit :

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(k\pi x).$$

On trouve, sur chacune des quatre figures de la page suivante, la représentation graphique de la fonction $f$ (en pointillés) et la représentation graphique d'une fonction $s_n$ pour $n$ valant 1, 2, 3 ou 5 (traits pleins).

Indiquer, pour chaque figure, laquelle des sommes $s_1$, $s_2$, $s_3$, et $s_5$ y est représentée.

On n'attend pas de justification.

Figure A

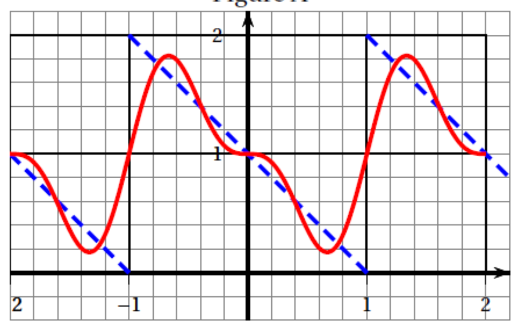



Figure B

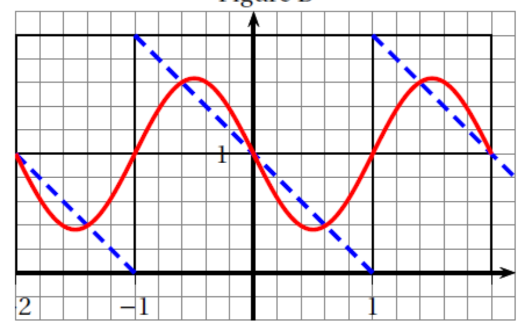



Figure C

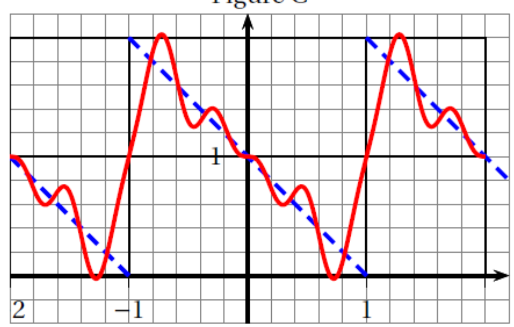
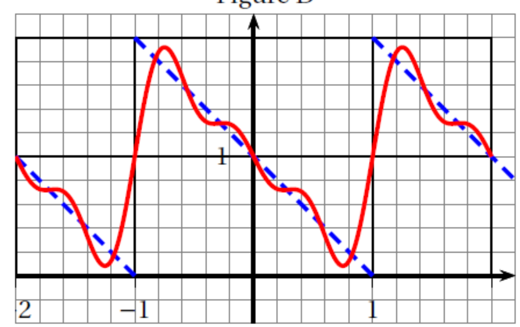



Figure D



*Dans le cadre de la conception d'un circuit à modulation de longueur d'impulsion, on étudie le spectre d'un signal porteur en dent de scie.*

# Exercice 1 (Suite)

## Partie B : Valeur efficace de $f$ sur une période :

**1.** On rappelle que la valeur efficace $E_{\text{eff}}$ de $f$ sur $[-1\,;\,1]$ est donnée par :

$$E_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

On admet que : $E_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x)^2\,\mathrm{d}x.$

**a.** Développer $(1-x)^2$ puis calculer $E_{\text{eff}}^2$.

**b.** Écrire les étapes du calcul et donner une valeur approchée arrondie à $10^{-3}$ du résultat.

**2.** On rappelle la formule de Parseval :

$$E_{\text{eff}}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

On décide de calculer une valeur approchée, notée $P$, de $E_{\text{eff}}^2$ en se limitant aux cinq premiers termes de la somme, c'est à dire :

$$P \approx a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

**a.** Calculer une valeur arrondie à $10^{-3}$ de $P$.

**b.** Calculer $\dfrac{P}{E_{\text{eff}}^2}$. Donner le résultat en % arrondi à l'unité.

**c.** Interpréter le résultat du **b.**