1) Laplace

a) $\mathscr{L}\left[\left(t^2 + t - e^{-3t}\right).\,\mathscr{U}(t)\right]$

F(p) = $\mathscr{L}\left[\left(t^2 + t - e^{-3t}\right).\,\mathscr{U}(t)\right]$ =

D'après les propriétés de linéarité :

$\mathcal{L}(\lambda f+g) = \lambda\,.\,\mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$

D'après le formulaire :

Fonction	Transformée de Laplace
$\mathscr{L}[e^{-ct}.\,\mathscr{U}(t)]$	$\dfrac{1}{p+c}$
$\mathscr{L}[t\,.\,\mathscr{U}(t)]$	$\dfrac{1}{p^2}$
$\mathscr{L}[t^n.\,\mathscr{U}(t)]$	$\dfrac{n\,!}{p^{n+1}}$

F(p) = $\mathscr{L}\left[t^2.\,\mathscr{U}(t)\right] + \mathscr{L}\left[t\,.\,\mathscr{U}(t)\right] - \mathscr{L}\left[e^{-3t}.\,\mathscr{U}(t)\right]$

F(p) = $\dfrac{2\,!}{p^{\,2+1}} + \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p+3}$

F(p) = $\dfrac{2}{p^3} + \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p+3}$

1) Laplace

b) $\mathscr{L}[\,(t+2).\,\mathscr{U}(t) + (t+3)\,\mathscr{U}(t-2)]$

$\mathscr{L}[\,\boxed{(t+2).\,\mathscr{U}(t)} + \boxed{(t+3)\,\mathscr{U}(t-2)}\,]$

On peut écrire avec un jeu d'écriture $(t+3) = (t-2)+5$

$f(t) = \boxed{(t+2).\,\mathscr{U}(t)} + (t+3)\,\mathscr{U}(t-2)$

$f(t) = \boxed{(t+2).\,\mathscr{U}(t)} + \boxed{((t-2)+5)\,\mathscr{U}(t-2)}$

Alors en développant les deux parties:

$= (t-2)\,\mathscr{U}(t-2) + 5\,\mathscr{U}(t-2)$

$= (t+2).\,\mathscr{U}(t) = t\,.\,\mathscr{U}(t) + 2\,\mathscr{U}(t)$

F(p) = $\mathscr{L}[t\,.\,\mathscr{U}(t) + 2\,\mathscr{U}(t) + (t-2)\,\mathscr{U}(t-2) + 5\,\mathscr{U}(t-2)]$

F(p) = $\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{2}{p} + \dfrac{1}{p^2}e^{-2p} + \dfrac{5}{p}e^{-2p}$

F(p) = $\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{2p}{p^2} + \left(\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{5}{p}\right)e^{-2p}$

F(p) = $\dfrac{1+2p}{p^2} + \left(\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{5}{p}\right)e^{-2p}$

Fonction	Transformée de Laplace
$\mathscr{L}[t\,.\,\mathscr{U}(t)]$	$\dfrac{1}{p^2}$
$\mathscr{L}[t^n.\,\mathscr{U}(t)]$	$\dfrac{n\,!}{p^{n+1}}$
$\mathscr{L}[e^{-ct}.\,\mathscr{U}(t)]$	$\dfrac{1}{p+c}$

$\mathscr{L}\,[\mathrm{f}(\mathrm{t}-\tau)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{p}\tau}\,.\,\mathrm{F}(p)$

Exemple: $\mathscr{L}\,[f(t-2)] = \mathrm{e}^{-2\mathrm{p}}\,.\,\mathrm{F}(p)$

2) Laplace inverse

a) $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right]$

$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right]$

Décomposition en éléments simple

F(p) = $\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}$ **=** $\frac{a}{(p+3)}$ **+** $\frac{b}{(p+4)}$

$$\begin{cases} Numérateur\ :\ p+2 = a\,(p+4) + b\,(p+3) \\ Dénominateur: (P+3)(p+4) \\ d'où \\ Numérateur\ :\ p+2 = (a+b)p + 4\,a + 3b \\ Dénominateur: (P+3)(p+4) \\ Identifier\ puis\ on\ obtient\ 2\ équations: \\ alors\ solutions\ évidentes \\ a+b=1 \\ 4\,a+3b=2 \\ d'où\ a=-1\ et\ b=2 \end{cases}$$

D'après le formulaire :

Fonction	Transformée de Laplace
$\mathscr{L}[t\,.\,\mathscr{U}(t)]$	$\frac{1}{p^2}$
$\mathscr{L}[t^n.\,\mathscr{U}(t)]$	$\frac{n\,!}{p^{n+1}}$
$\mathscr{L}[e^{-ct}.\,\mathscr{U}(t)]$	$\frac{1}{p+c}$

F(p) = $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right] = \frac{-1}{(p+3)} + \frac{2}{(p+4)} = -1 \times \frac{1}{(p+3)} + 2 \times \frac{1}{(p+4)}$

D'où f(t) = $\left(-1 \times e^{-3t} + 2 \times e^{-4t}\right).\ \mathscr{U}(t)$

3)Equations différentielles avec méthode de Laplace pour déterminer la solution particulière

a) $\boxed{x'(t)} + \boxed{x(t)} = \boxed{t\,\mathscr{U}(t)} - \boxed{t\,\mathscr{U}(t-1)}$ *avec conditions initiales* $x(0) = 0$

On peut obtient avec un jeu d'écriture $t = (t-1)+1$

$$f(t) = t\,.\mathscr{U}(t-1) = ((t-1)+1)\ \mathscr{U}(t-1)$$

$$f(t) = (t-1)\,\mathscr{U}(t-1) + 1\ \mathscr{U}(t-1)$$

$$\mathscr{L}\,[\mathrm{f(t)}] = \mathscr{L}\,[(t-1)\,\mathscr{U}(t-1)] + \mathscr{L}\,[1.\ \mathscr{U}(t-1)]$$

$$\mathscr{L}\,[\mathrm{f(t)}] = \frac{1}{\mathrm{p}^2}.\,\mathrm{e}^{-\mathrm{p}} + \frac{1}{\mathrm{p}}.\,\mathrm{e}^{-\mathrm{p}}$$ *d'après* $\mathscr{L}[f(t-\tau)] = e^{-p\tau}\,F(p)$ *et* $\tau = 1$

Fonction	Transformée de Laplace
$\mathscr{L}[t\,.\mathscr{U}(t)]$	$\dfrac{1}{p^2}$

$x(p)$

Dérivée: **Si** $F(p) = \mathcal{L}[\mathrm{f(t)}]$ alors $= \mathcal{L}[\mathrm{f\,'(t)}\ ] = pF(p) - f(0^+)$
où $f(0^+) = \lim\limits_{t\to0^+} f(t)$

$$\mathcal{L}[x\,'(\mathrm{t})\ ] = p.\,x(p) - x(0^+)$$

Avec ici les conditions initiales $x(0) = 0$

Primitive: **Si** $F(p) = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right]$ alors $= \mathcal{L}[\mathrm{F(t)}] = \frac{F(p)}{p} - f(0^+)$
où $f(0^+) = \lim\limits_{t\to0^+} f(t)$

$$g(p) = \frac{1}{p^2\,(p+1)} = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p+1} = \frac{1}{p^2} + \frac{-1}{p} + \frac{1}{p+1}$$

$$p.\,x(p) - x(0^+) + x(p) = \frac{1}{p^2} - \left(\frac{1}{\mathrm{p}^2}.\,\mathrm{e}^{-\mathrm{p}} + \frac{1}{\mathrm{p}}.\,\mathrm{e}^{-\mathrm{p}}\right)$$

$$p.\,x(p) - 0 + x(p) = \frac{1}{p^2} - \left(\frac{1}{\mathrm{p}^2}.\,\mathrm{e}^{-\mathrm{p}} + \frac{1}{\mathrm{p}}.\,\mathrm{e}^{-\mathrm{p}}\right)$$

$$x(p)\,(p+1) = \frac{1}{p^2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{p}}\left(\frac{\mathrm{p+1}}{\mathrm{p}^2}\right)$$

$$x(p) = \frac{1}{p^2\,(p+1)} - \frac{1}{p^2}.\,\mathrm{e}^{-\mathrm{p}}$$

$$x(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{-1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p^2}.\,\mathrm{e}^{-\mathrm{p}}$$

D'où $x(t) = (t - 1 + e^{-t})\ \mathscr{U}(t)$ **-** $(t-1)\ \mathscr{U}(t-1)$