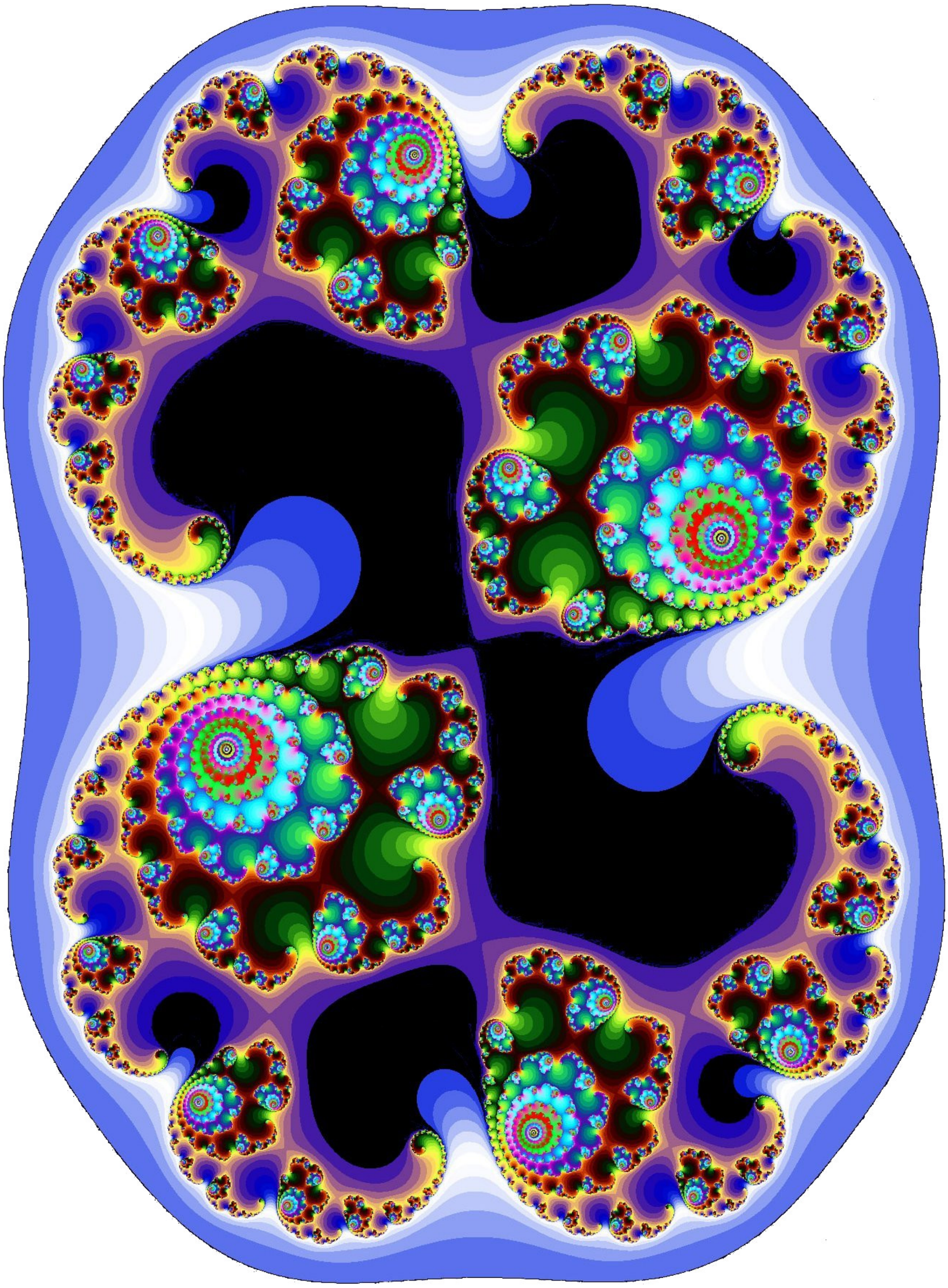
Cours de mathématiques

classe de $3^{\text{ème}}$

2018-2019

Table des matières

Mathématiques **artistiques :** une **fractale**



Chapitre 1

Nombres et arithmétique

1.1 Rappels et nouvelles notations

Définition 1 (Entiers naturels)**.**

L'ensemble des entiers naturels est constitué de tous les nombres entiers positifs {0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;...}.

Remarque : On note $\mathbb{N}$ cet ensemble (de naturale en italien par PEANO Giuseppe, 1858-1932).
Donc $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; ...\}$.

Définition 2 (Entiers relatifs)**.**

L'ensemble des nombres relatifs est constitué de tous les nombres entiers (positifs ou négatifs) {. . . ;-3 ;-2 ;-1 ;0 ;1 ;2 ;3. . .}.

Remarque : On note $\mathbb{Z}$ cet ensemble (de zahl : 'nombre' en allemand par Nicolas Bourbaki).

Définition 3 (Nombres décimaux)**.**

On dit qu'un nombre est décimal s'il peut s'écrire avec une quantité finie de chiffres.

Exemples : 0,125 ; 3 ; -1/4 **mais pas** $\frac{1}{3} = 0,3333...$ **!**. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des décimaux (Nicolas Bourbaki).

Définition 4 (Nombres rationnels)**.**

On dit qu'un nombre est rationnel s'il peut s'écrire sous la forme d'une fraction de deux entiers relatifs.

Exemples : Tous les nombres décimaux sont rationnels mais aussi $\frac{1}{3}$; $\frac{-287}{11}$ **mais** $\sqrt{2}$; π ne sont pas rationnels (admis). On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels (de quotiente par Peano Giuseppe)

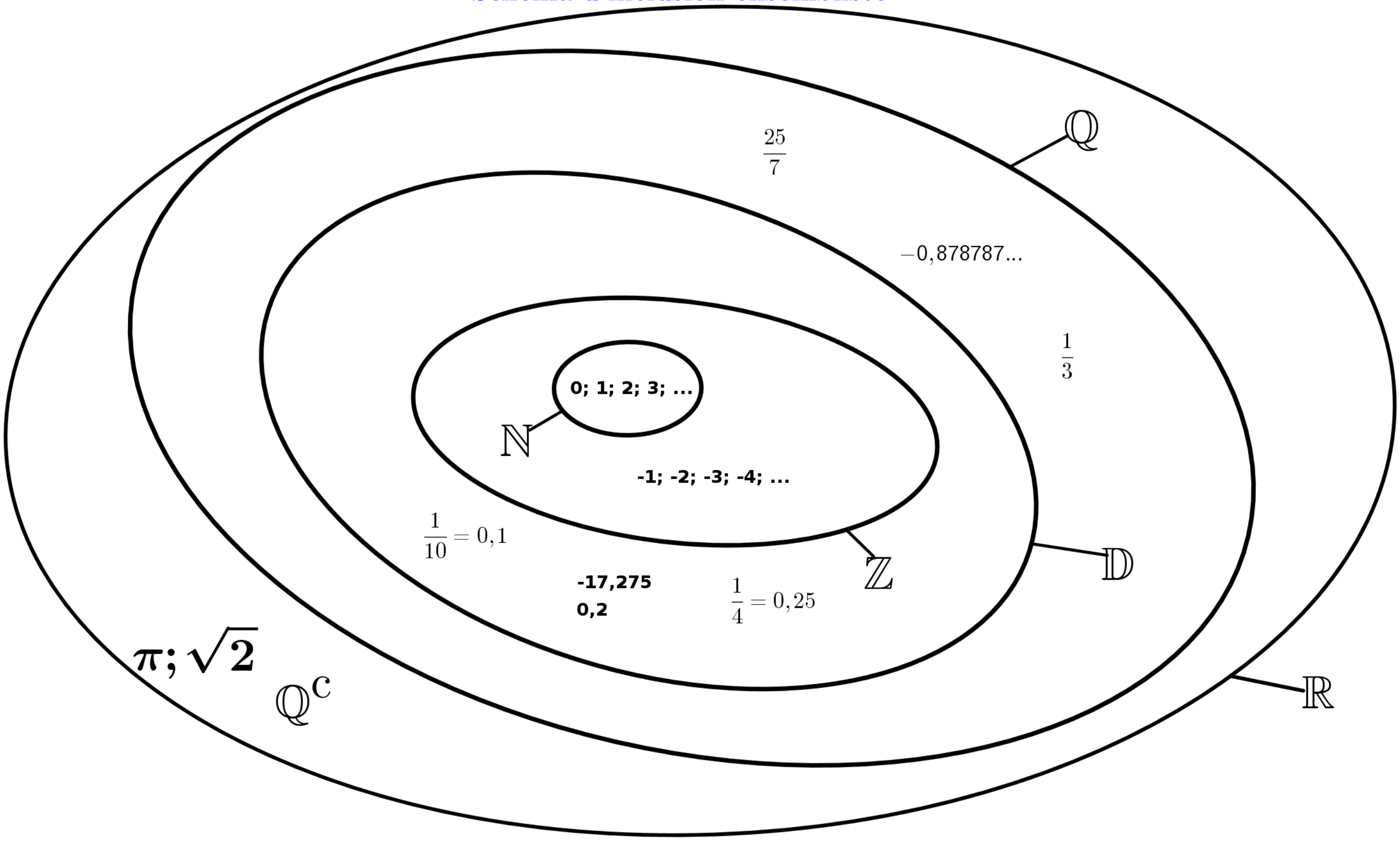
Définition 5 (Nombres irrationnels)**.**

On dit qu'un nombre est irrationnel s'il ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux nombres entiers relatifs.

Exemples : $\sqrt{2}$, π, On note $\mathbb{Q}^c$ l'ensemble des nombres irrationnels.

Remarque : l'ensemble de tous les nombres précédents s'appelle l'ensemble des nombres réels, noté : $\mathbb{R}$.

Schéma d'inclusion ensembliste



Exercice :
À quelle catégorie appartiennent les nombres suivants (à placer dans le schéma) :

$$\text{-0,256}\ ; \quad 1/5\ ; \quad 10^{-2}\ ; \quad 3\pi\ ; \quad \text{-225/15}.$$

1.2 Diviseurs et PGCD

Définition 6.

On dit qu'un nombre entier b **divise** un autre nombre entier a s'il exite un nombre entier c tel que $a = bc$, autrement dit si a est dans la table de multiplication de b.
Dans ce cas, on peut dire aussi que :

b est un diviseur de a
a est un multiple de b
a est divisible par b.

Exemples :

- $18 = 3 \times 6$ donc 3 et 6 sont des diviseurs de 18 et 18 est un multiple de 3 et 6.
- $77 = 11 \times 7$ donc 77 est divisible par 11.
- Voici la liste de tous les diviseurs de 25 : 1, 5, 25.
- Voici la liste de tous les diviseurs de 30 : 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.
- Voici la liste de tous les diviseurs de 31 : 1, 31.

Remarque : le nombre 1 est un diviseur de tous les autres nombres, autrement dit tout nombre est un multiple de 1.

Définition 7.

On dit qu'un nombre c est un diviseur commun de a et b si c divise à la fois a et b.
Parmi tous les diviseurs communs de deux nombres a et b, on note PGCD(a,b) le plus grand diviseur commun à la fois à a et b.
On dit que a et b sont **premiers entre eux** lorsque PGCD(a,b)=1, autrement dit lorsque l'unique diviseur commun de a et b est 1.

Exemples :

- Les diviseurs de 60 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.
  Les diviseurs de 48 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.
  Les diviseurs communs de 48 et 60 sont donc : 1, 2, 3, 4, 6 et 12 et donc PGCD(60,48)=12
- Les diviseurs de 18 sont : 1, 2, 3, 6, 9, 18.
  Les diviseurs de 35 sont : 1, 5, 7, 35.
  L'unique diviseur commun de 18 et 35 est 1 , PGCD(18,35)=1 et donc 18 et 35 sont premiers entre eux.

Remarques : Pour tout nombre entier a et b, on a :

$$\text{PGCD}(a,a)=a\,; \qquad \text{PGCD}(a,a\times b)=a$$

Exercice type brevet :
Gauss possède 60 carambars et 48 malabars, il décide de les partager en petits sachets identiques pour les donner à ses professeurs. Combien peut-il faire de sachets identiques au maximum ? Quelle est la composition de chacun des sachets ?
Réponse : On veut pouvoir partager les carambars et les malabars en un même nombre de paquets. On cherche donc les diviseurs commun de 60 et 48 et celui qui nous intéresse est le plus grand puisqu'on cherche le maximum de sachets identiques possibles. Or on sait que PGCD(60,48)=12, Gauss peut donc faire 12 sachets identiques au maximum.

1.3 Algorithmes et PGCD

1.3.1 Algorithme des différences

Propriété 1.

Le PGCD de deux nombres entiers a et b est égal au PGCD de : la différence entre a et b et du plus petit nombre entre a et b.

Exemples :

- PGCD(12,15)=PGCD(12,3) car la différence entre 12 et 15 est **3** et le plus petit entier entre 12 et 15 est **12**.
- PGCD(35,25)=PGCD(25,10) car la différence entre 35 et 25 est **10** et le plus petit entier entre 35 et 25 est **25**.

Algorithme :
On en déduit alors une méthode pour trouver le PGCD de deux nombres entiers, pour cela il suffit de calculer les différences successives. Le PGCD est alors la dernière différence non nulle.

Exemple : calcul du PGCD(63,45)

a	b	différences
63	**45**	18
45	18	27
27	18	9
18	9	9
9	9	0

À chaque ligne on calcule la différence entre a et b, puis à la ligne suivante on remplace a par le plus petit nombre entre a et b et on remplace b par la différence entre a et b.

La dernière différence non nulle étant le nombre **9** on en déduit que PGCD(63,45)=9

1.3.2 Algorithme d'Euclide

Propriété 2.

Le PGCD de deux nombres entiers a et b (avec $a \geqslant b$) est égal au PGCD du plus petit nombre entre a et b et du reste dans la division euclidienne de a par b.

Exemples :

- PGCD(24,60)=PGCD(24,12) car $60 = 24 \times 2 + 12$
- PGCD(118,32)=PGCD(32,22) car $118 = 32 \times 3 + 22$

Algorithme :
On en déduit alors une méthode pour trouver le PGCD de deux nombres entiers, pour cela il suffit de calculer les restes dans les divisions euclidiennes successives. Le PGCD est alors le dernier reste non nul.

Exemple : calcul du PGCD(312,255)

a	b	restes	égalités
312	**255**	57	$312 = 255 \times 1 + 57$
255	57	27	$255 = 57 \times 4 + 27$
57	27	3	$57 = 27 \times 2 + 3$
27	3	0	$27 = 3 \times 9 + 0$

À chaque ligne on calcule le reste dans la division euclidienne de a par b, puis on ramplace a par le plus petit nombre entre a et b et on remplace b par le reste dans la division euclidienne de a par b.

La dernier reste non nul étant le nombre **3** on en déduit que PGCD(312,255)=3

Petite introduction (pour le prof.) : rappeler ce qu'est une fraction irréductible (en 5ème et 4ème) et montrer que pour avoir une fraction la plus “petite” possible il faut diviser (numérateur et dénominateur) par un même nombre (un diviseur commun) le plus grand possible donc par le PGCD.

1.4 Fractions et PGCD

Définition 8.

On dit qu'une fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible** lorsque a et b sont premiers entre eux.

Exemples : On a vu dans un exemple précédent que PGCD(18,35)=1 donc la fraction $\frac{18}{35}$ est irréductible. Cela veut aussi dire qu'on ne peut pas la simplifier davantage. Par contre PGCD(312,255)=3, la fraction $\frac{312}{255}$ n'est donc pas irréductible, on peut la simplifier (en divisant par 3) $\frac{312}{255} = \frac{104}{85}$.

Propriété 3.

Pour rendre une fraction $\frac{a}{b}$ irréductible il suffit de diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

Exemples :

- PGCD(312,255)=3 donc $\frac{312}{255} = \frac{\cancel{3} \times 107}{\cancel{3} \times 85} = \frac{107}{85}$ et cette dernière fraction est irréductible.
- PGCD(715,1001)=143 donc $\frac{715}{1001} = \frac{\cancel{143} \times 7}{\cancel{143} \times 5} = \frac{7}{5}$ et cette dernière fraction est irréductible.

1.5 Interrogation écrite 1

Interrogation de mathématiques

dans la joie et la bonne humeur

Exercice 1 :
Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un entier et préciser s'il s'agit d'un nombre décimal ou d'un nombre rationnel

$A = \dfrac{-15}{9} \div (-5)$ $\qquad B = \dfrac{\dfrac{16}{5}+4}{\dfrac{16}{5}-4}$

Exercice 2 :

Donner le résultat sous la forme a^n où a et n sont des entiers relatifs :
$C = \dfrac{7^{-2}}{7^5}$ $\qquad D = \dfrac{12^{-4}}{3^{-4}}$

Exercice 3 :

Donner la notation scientifique de :
$E = 2578 \times 10^2$

Exercice 4 : Développer et réduire l'expression suivante :
$F = (5-x)(x+3)$

Exercice 5 :

1. À partir de l'égalité : $\mathbf{3021 = 53 \times 57}$ faire une phrase en utilisant le mot multiple et une autre phrase en utilisant le mot diviseur.
2. Citer tous les diviseurs de 30 puis ceux de 28 (par ordre croissant).

1.6 Corrigé de l'interrogation écrite 1

Corrigé de l'interrogation de mathématiques

dans la joie et la bonne humeur

Exercice 1 :
Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un entier et préciser s'il s'agit d'un nombre décimal ou d'un nombre rationnel

$A = \dfrac{-15}{9} \div (-5)$

$A = \dfrac{-15}{9} \times \dfrac{1}{-5}$

$A = \dfrac{\cancel{-5} \times \cancel{3}}{3 \times \cancel{3}} \times \dfrac{1}{\cancel{(-5)}}$

$A = \boxed{\dfrac{1}{3}} = 0,\bar{3}$ rationnel non décimal

$B = \dfrac{\frac{16}{5} + 4}{\frac{16}{5} - 4}$

$B = \dfrac{\frac{16}{5} + \frac{20}{5}}{\frac{16}{5} - \frac{20}{5}} = \dfrac{\frac{36}{5}}{\frac{-4}{5}}$

$B = \frac{36}{5} \div \frac{-4}{5}$

$B = \frac{36}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{-4} = \boxed{-9}$ est un nombre décimal

Exercice 2 :

Donner le résultat sous la forme a^n où a et n sont des entiers relatifs :

$C = \dfrac{7^{-2}}{7^5} = 7^{-2-5} = \boxed{7^{-7}}$ $\quad D = \dfrac{12^{-4}}{3^{-4}} = \left(\dfrac{12}{3}\right)^{-4} = \boxed{4^{-4}}$

Exercice 3 :

Donner la notation scientifique de :

$E = \overbrace{2578}^{} \times 10^2$
$E = 2,578 \times 10^3 \times 10^2$
$E = 2,578 \times 10^5$

Exercice 4 :

Développer et réduire l'expression suivante :

$F = (5 - x)(x + 3) = 5x + 15 - x^2 - 3x = 15 + 2x - x^2$

Exercice 5 :

1. À partir de l'égalité : **3021 = 53 × 57** faire une phrase en utilisant le mot multiple et une autre phrase en utilisant le mot diviseur.
3021 est un multiple de 53 (ou 57) ; 57 (ou 53) est un diviseur de 3021
2. Citer tous les diviseurs de 30 et 28 (par ordre croissant).
Les diviseurs de 30 sont : 1 ;2 ;3 ;5 ;6 ;10 ;15 ;30
Les diviseurs de 28 sont : 1 ;2 ;4 ;7 ;14 ;28

1.7 Interrogation écrite 2

Interrogation de mathématiques

dans la joie et la bonne humeur

Exercice 1 : Développer et réduire l'expression suivante :

$A = (7 - x)(x + 5)$

Exercice 2 :

Donner le résultat sous la forme a^n où a et n sont des entiers relatifs :

$B = \dfrac{11^{-3}}{11^4}$ $\qquad$ $C = \dfrac{15^{-8}}{3^{-8}}$

Exercice 3 :

Donner la notation scientifique de :

$D = 3412 \times 10^5$

Exercice 4 :
Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un entier et préciser s'il s'agit d'un nombre décimal ou d'un nombre rationnel

$E = \dfrac{-20}{12} \div (-5)$ $\qquad$ $F = \dfrac{\frac{8}{7} + 4}{\frac{8}{7} - 4}$

Exercice 5 :

1. À partir de l'égalité : $\mathbf{5624 = 74 \times 76}$ faire une phrase en utilisant le mot multiple et une autre phrase en utilisant le mot diviseur.
2. Citer tous les diviseurs de 42 puis ceux de 20 (par ordre croissant).

1.8 Corrigé de l'interrogation écrite 2

Corrigé de l'interrogation de mathématiques

dans la joie et la bonne humeur

Exercice 1 :

Développer et réduire l'expression suivante :

$A = (7-x)(x+5) = 7x + 35 - x^2 - 5x = -x^2 + 2x + 35$

Exercice 2 :

Donner le résultat sous la forme a^n où a et n sont des entiers relatifs :

$B = \frac{11^{-3}}{11^4} = 11^{-3-4} = \boxed{11^{-7}}$ $\quad C = \frac{15^{-8}}{3^{-8}} = \left(\frac{15}{3}\right)^{-8} = \boxed{5^{-8}}$

Exercice 3 :

Donner la notation scientifique de :

$D = 3412 \times 10^5$

$D = \overbrace{3,412 \times 10^3}^{} \times 10^5$

$D = 3,412 \times 10^8$

Exercice 4 :

Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un entier et préciser s'il s'agit d'un nombre décimal ou d'un nombre rationnel

$E = \frac{-20}{12} \div (-5)$

$E = \frac{-20}{12} \times \frac{1}{-5}$

$E = \frac{\cancel{-5} \times \cancel{4}}{3 \times \cancel{4}} \times \frac{1}{\cancel{(-5)}}$

$E = \boxed{\frac{1}{3}} = 0,\bar{3}$ rationnel non décimal

$F = \frac{\frac{8}{7} + 4}{\frac{8}{7} - 4}$

$F = \frac{\frac{8}{7} + \frac{28}{7}}{\frac{8}{7} - \frac{28}{7}} = \frac{\frac{36}{7}}{\frac{-20}{7}}$

$F = \frac{36}{7} \div \frac{-20}{7}$

$F = \frac{36}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{7}}{-20} = \frac{36}{-20} = \boxed{\frac{-9}{5} = -1,8}$ est un nombre décimal

Exercice 5 :

1. À partir de l'égalité : **5624** $=$ **74** $\times$ **76** faire une phrase en utilisant le mot multiple et une autre phrase en utilisant le mot diviseur.
5624 est un multiple de 74 (ou 76) ; 74 (ou 76) est un diviseur de 5624
2. Citer tous les diviseurs de 42 puis ceux de 20 (par ordre croissant).
Les diviseurs de 42 sont : 1 ;2 ;3 ;6 ;7 ;14 ;21 ;42
Les diviseurs de 20 sont : 1 ;2 ;4 ;5 ;10 ;20

1.9 Contrôle

Contrôle de mathématiques

Ce qui ne nous tue pas nous rend plus fort (Nietzsche)

Exercice 1 : (Extrait du brevet d'Amérique du nord 2008)

On pose $D = (12x + 3)(2x - 7) - (2x - 7)^2$.
Développer et réduire D.

Exercice 2 : (Extrait du brevet Martinique 2008)

Donner l'écriture scientifique de B :

$$B = \frac{81 \times 10^3 \times 6 \times 10^{-10}}{18 \times 10^{-2}}$$

Exercice 3 : (Extrait du brevet Martinique 2008)

Calculer le nombre A ci-dessous et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible, préciser si A est décimal ou non :

$$A = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{17}{9} - \frac{1}{3}}$$

Exercice 4 : (Extrait du brevet 2003)

a) Calculer le PGCD des nombres entiers 1356 et 4972. (Faire apparaître les calculs intermédiaires sur la copie.)

b) Donner la forme irréductible de la fraction $\frac{1356}{4972}$, préciser si c'est un nombre décimal ou non.

Exercice 5 : (Problème extrait du brevet d'Amérique du nord 2008)

1. En précisant la méthode utilisée, calculer le PGCD de 378 et 270.
2. Pour une kermesse, un comité des fêtes dispose de 378 billes et 270 calots. Il veut faire le plus grand nombre de lots identiques en utilisant toutes les billes et tous les calots.

- **a)** Combien de lots identiques pourra-t-il faire ?
- **b)** Quelle sera la composition de chacun de ces lots ?

Bonus : Trouver trois nombres entiers naturels successifs tels que la somme de leur carré soit égale à 1877.

Barème : 4/3/4/4/5

1.10 Corrigé du contrôle

Corrigé du contrôle de mathématiques

Ce qui ne nous tue pas nous rend plus fort (Nietzsche)

Exercice 1 : (Extrait du brevet d'Amérique du nord 2008)

$D = (12x+3)(2x-7) - (2x-7)^2.$
$D = 24x^2 - 84x + 6x - 21 - (2x-7)(2x-7)$
$D = 24x^2 - 78x - 21 - (4x^2 - 14x - 14x + 49)$
$D = 24x^2 - 78x - 21 - 4x^2 + 28x - 49$
$D = \boxed{20x^2 - 50x - 70}$

Exercice 2 : (Extrait du brevet Martinique 2008)

$$B = \frac{81 \times 10^3 \times 6 \times 10^{-10}}{18 \times 10^{-2}} = \frac{81 \times 6}{18} \times \frac{10^3 \times 10^{-10}}{10^{-2}} = \frac{9 \times \cancel{9} \times 3 \times \cancel{2}}{\cancel{9} \times \cancel{2}} \times \frac{10^{-7}}{10^{-2}} = 27 \times 10^{-5} = \boxed{2,7 \times 10^{-4}}$$

Exercice 3 : (Extrait du brevet Martinique 2008)

$$A = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{17}{9} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{6} + \frac{3}{6}}{\frac{17}{9} - \frac{3}{9}} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{14}{9}} = \frac{7}{6} \times \frac{9}{14} = \frac{\cancel{7}}{\cancel{3} \times 2} \times \frac{\cancel{3} \times 3}{2 \times \cancel{7}} = \frac{3}{4} = 0,75 \quad \text{est un nombre décimal}$$

Exercice 4 : (Extrait du brevet 2003)

a) Calculer le PGCD des nombres entiers 1356 et 4972.

Algorithme des différences	Algorithme de la division euclidienne
$4972 - 1356 = 3616$	$4972 = 3 \times 1356 + 904$
$3616 - 1356 = 2260$	$1356 = 1 \times 904 + \boxed{452}$
$2260 - 1356 = 904$	$904 = 2 \times 452 + 0$
$1356 - 904 = 452$	
$904 - 452 = \boxed{452}$	
$452 - 452 = 0$	

b) $\dfrac{1356}{4972} = \dfrac{1356 \div 452}{4972 \div 452} = \dfrac{3}{11} = 0,\overline{27}$, n'est pas un nombre décimal mais est rationnel.

Exercice 5 : (Problème extrait du brevet d'Amérique du nord 2008)

1. En précisant la méthode utilisée, calculer le PGCD de 378 et 270.

Algorithme des différences	Algorithme de la division euclidienne
$378 - 270 = 108$	$378 = 1 \times 270 + 108$
$270 - 108 = 162$	$270 = 2 \times 108 + \boxed{54}$
$162 - 108 = 54$	$108 = 2 \times 54 + 0$
$108 - 54 = \boxed{54}$	
$54 - 54 = 0$	

2.

a) D'après 1. il pourra faire 54 lots identiques.
b) Il y aura $\frac{378}{54} = 7$ billes par lots et $\frac{270}{54} = 5$ calots par lots.

Bonus : Trouver trois nombres entiers naturels successifs tels que la somme de leur carré soit égale à 1877.
Soit x un tel nombre entier, $(x-1)$ est le nombre qui le précède et $(x+1)$ est le nombre qui le suit et on doit donc

avoir :

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 \;+\; x^2 \;+\; (x+1)^2 &= 1877\\
\underbrace{(x-1)\times(x-1)}\,+x^2+\underbrace{(x+1)\times(x+1)} &= 1877\\
\overbrace{x^2 \cancel{-2x}+1}\;+x^2\;+\;\overbrace{x^2\cancel{+2x}+1} &= 1877\\
3x^2+2 &= 1877\\
3x^2 &= 1875\\
x^2 &= 625\\
x &= \sqrt{625} = \boxed{25}
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Thalès

2.1 Théorème de Thalès (reformulation)

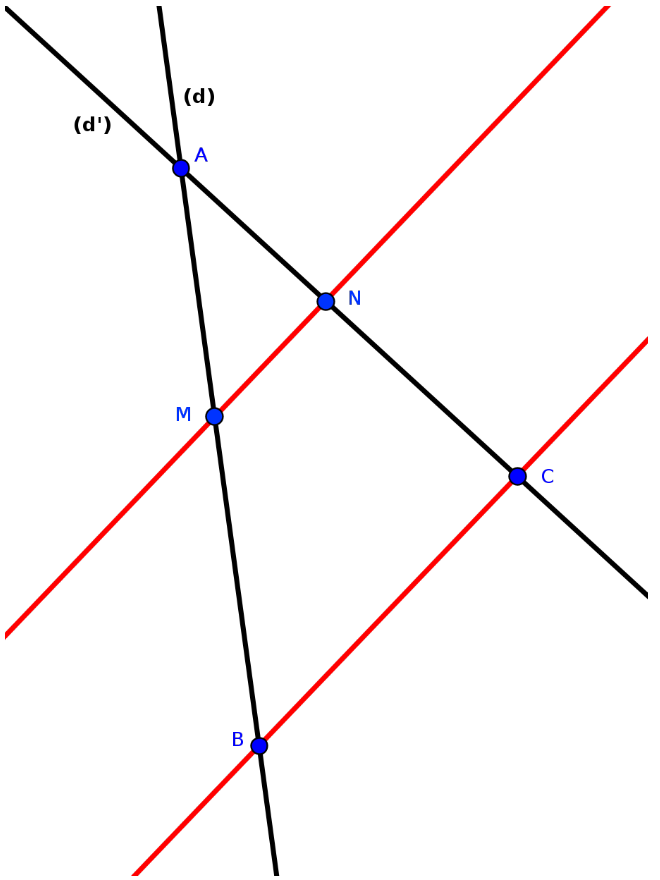
Propriété 4 (Thalès)**.**

Avec la configuration suivante :

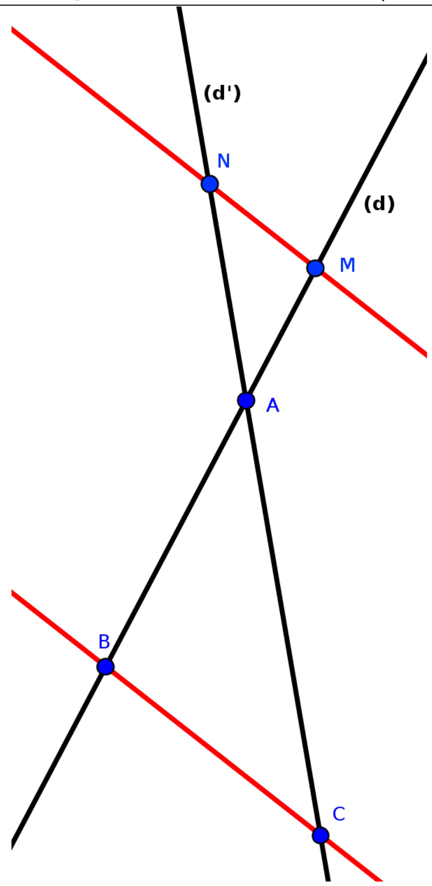
- (d) et (d') sont deux droites sécantes en un point A,
- B et M sont deux points de (d) distincts de A,
- C et N sont deux points de (d') distincts de A.

Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles alors on a l'égalité des quotients $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

Première configuration possible avec (MN)//(BC)



Seconde configuration possible avec (MN)//(BC)



Remarque : cette égalité signifie que les longueurs des côtés des triangles AMN et ABC sont proportionnelles ! Autrement dit : les triangles ABC et AMN ont la même forme mais sont à des échelles différentes. Dans la seconde configuration on a en plus de la réduction un demi-tour autour du sommet A (symétrie centrale) de l'un des triangles.

Exemple d'application :

Dans la figure précédente, si $MN = 1,25$, $BC = 5$ et $AN = 4$ quelle est alors la longueur de $[NC]$?

Rédaction de la réponse :

On sait que les points A,N,C et A,M,B sont alignés et les doites (MN) et (BC) sont parallèles.
Or, d'après le théorème de Thalès on a l'égalité :

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$, soit en remplaçant par les valeurs connues :

$\frac{AM}{AB} = \boxed{\frac{4}{AC}} = \boxed{\frac{1,25}{5}}$, on sélectionne les fractions utiles :

$\frac{4}{AC} = \frac{1,25}{5}$ puis avec un produit en croix :

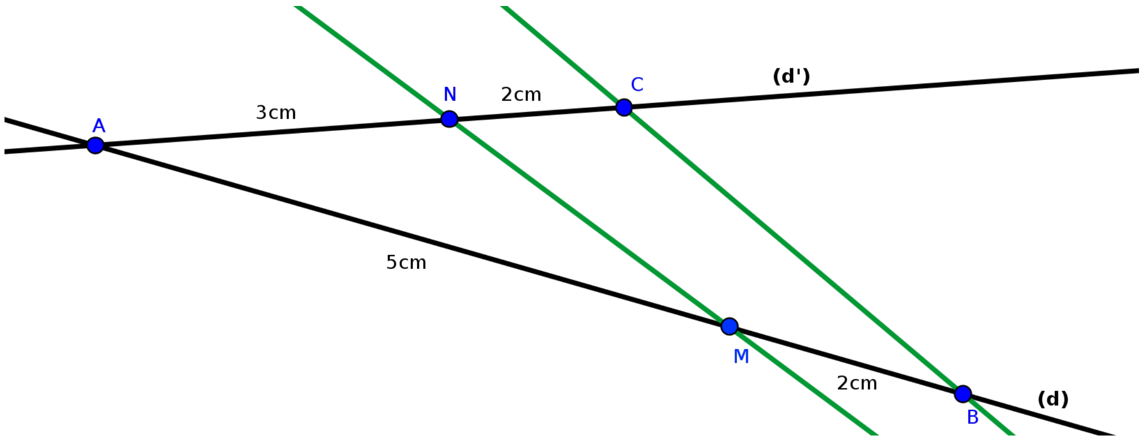
$1,25 \times AC = 20$ et donc : $AC = \frac{20}{1,25} = 16$

Donc comme $NC = NA + AC$ on a : $NC = 4 + 16 = 20$.

★ **Conséquence (contraposée)**

Une conséquence très importante du théorème de Thalès est que si l'une des égalités : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ **est fausse alors les droites (MN) et (BC) ne peuvent pas être parallèles. On parle alors de contraposée du théorème de Thalès.**

Exemple :



Dans la figure ci-dessus, les points A,M,B et A,N,C sont alignés **mais** :

$$0,71 \simeq \frac{5}{7} = \frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC} = \frac{3}{5} = 0,6$$

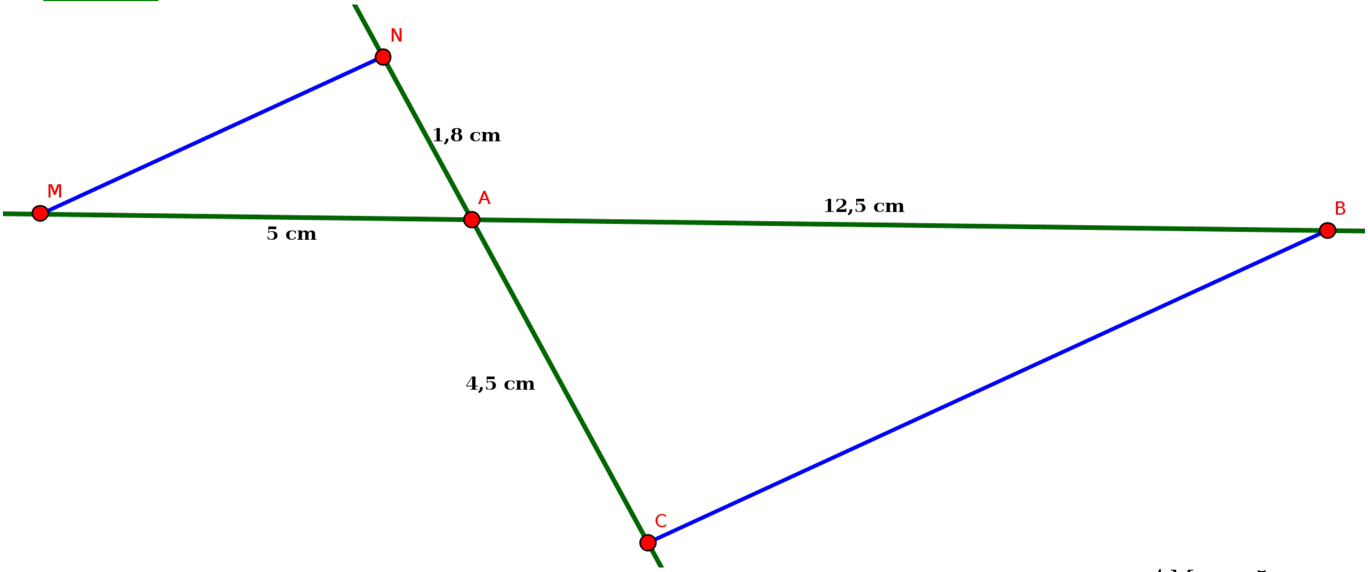
Donc, d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles !

2.2 Réciproque du théorème de Thalès

Propriété 5.

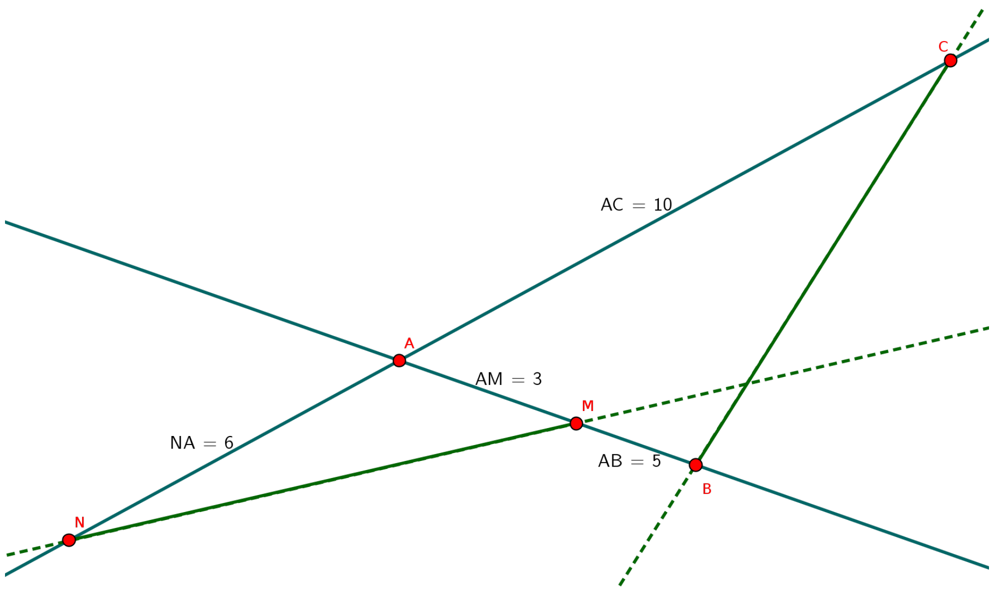
Si les points A, M, B et les points A, N, C sont alignés dans le même ordre et si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Exemple : Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ? **Rédaction :**



On sait que les points A,M,B et A,N,C sont alignés dans le même ordre. De plus, on a d'une part $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{5}{12,5} = 0,4$ et d'autre part $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1,8}{4,5} = 0,4$.
Or dans ces conditions, la réciproque du théorème de Thalès nous dit que si on a égalité des quotients alors les droites sont parallèles.
Donc (BC)//(MN).

Remarque : Pourquoi y a-t-il dans la réciproque du théorème de Thalès les termes **"dans le même ordre"** ? Et bien supposons que les points ne soient pas alignés dans le même ordre et que, par exemple, A n'est pas entre M et B. Dans ce cas on peut tout à fait avoir l'égalité des quotients requis par le théorème de Thalès mais sans avoir de droites parallèles comme le montre la figure suivante :
Contre-exemple :

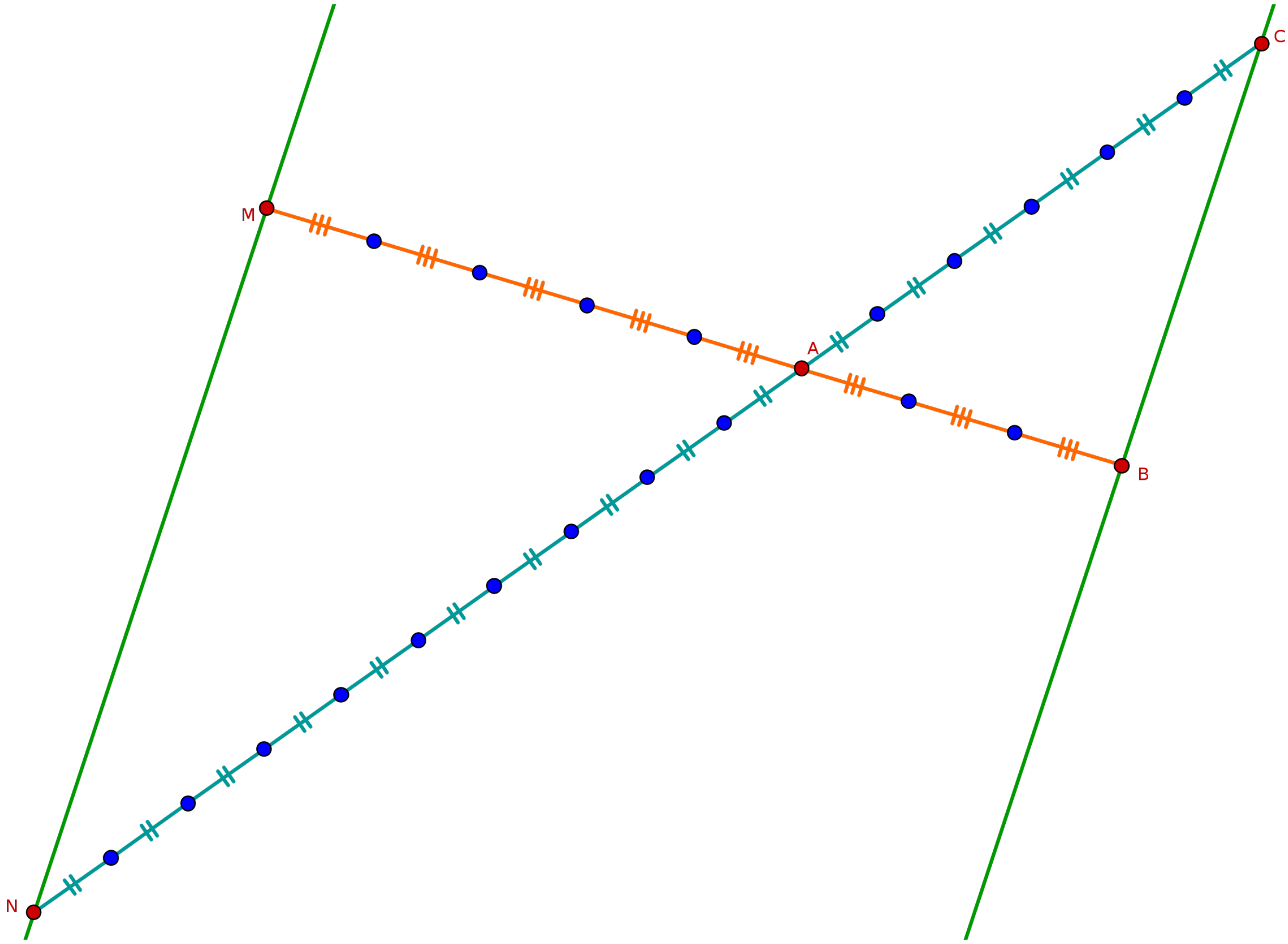


Dans cette dernière figure les points A,M,B et A,N,C **ne sont pas alignés dans le même ordre** pourtant :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5} \text{ et } \frac{AN}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

mais les droites (MN) et (BC) ne sont clairement pas parallèles.

Autre exemple (unités non définies) :



Ici les points A,M,B et A,N,C **sont alignés dans le même ordre** et $\frac{AM}{AB} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{5}{3}$

Or, dans ces conditions et d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites sont parallèles.

Donc (MN) et (BC) sont parallèles.

2.3 Agrandissement - Réduction

Rappel : Lorsque l'on copie une figure dans une taille différente on peut parler d'agrandissement (si la nouvelle figure est plus grande) ou de réduction (si la nouvelle figure est plus petite).
Le rapport d'agrandissement ou de réduction (qu'on appelle aussi l'**échelle**) se calcule en effectuant le quotient d'une longueur de la nouvelle figure par la longueur correspondante de l'ancienne.

Exemple : J'ai un carré de côté 5cm dont je réalise une copie : un nouveau carré de côté 8cm. J'ai donc réalisé un agrandissement de rapport $\frac{8}{5} = 1,6$.

Remarque : Dans le cas d'un agrandissement le rapport sera donc toujours un nombre plus grand que 1 et dans le cas d'une réduction le rapport sera toujours plus petit que 1.

Propriété 6.

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport $r > 0$. ($r > 1$: agrandissement ; $r < 1$: réduction)

- Les mesures d'angles et le parallélisme sont conservés.
- Les longueurs sont multipliées par r.
- Les aires sont multipliées par r^2
- Les volumes sont multipliés par r^3

Exemple : Si l'on passe de la figure 1 à la figure 2 par une réduction de rapport $\mathbf{0,8} < 1$

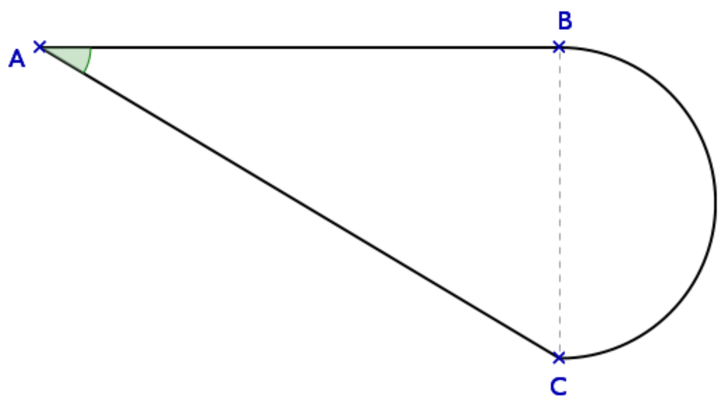


Figure 1

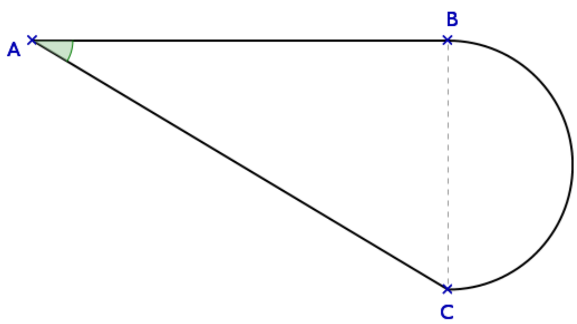


Figure 2

	Figure 1	$\longrightarrow$	**Figure 2**
Angle $\widehat{BAC}$	36°	conservé	36°
Longueur AB	4cm	$4 \times 0,8 = 3,2$	3,2cm
Aire de la figure	21,36 cm^2	$21,36 \times 0,8^2 = 13.6704$	13.6704cm^2

2.4 Devoir maison

Devoir de mathématiques

Choisis toujours le chemin qui semble le meilleur même s'il paraît plus difficile : l'habitude le rendra bientôt agréable. (Pythagore)

I - Ératosthène et les nombres premiers

Définitions : Un nombre entier est dit **premier** si il a exactement **deux** diviseurs : 1 et lui-même.
Un nombre qui n'est pas premier est dit composé.

On va rechercher tous les nombres premiers inférieur à 25 par la méthode dite du "*crible d'Ératosthène*" :

~~1~~	2	3	~~4~~	5
~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~
~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25

- pour cela on raye déjà 1 car il n'a qu'un seul diviseur : 1.
- Ensuite on examine le nombre suivant : 2; 2 a exactement 2 diviseurs : 1 et lui même c'est donc un nombre premier on ne le raye pas, par contre on peut rayer tous les multiples de 2 autres que 2 c'est à dire : 4 ;6 ;8 ;10 ;.... car ils auront au moins trois diviseurs : 1 ;2 et eux mêmes.
- On recommence avec le nombre suivant qui n'est pas rayé : 3 qui est un nombre premier, on ne le raye donc pas mais par contre on peut rayer tous les multiples de 3 autres que 3 : 6 ;9 ;12 ;15.....
- On recommence avec le nombre suivant qui n'est pas rayé : 5 qui est un nombre premier, on ne le raye donc pas mais par contre on peut rayer tous les multiples de 5 autres que 5 : 10 ;15 ;20 ;25.
- On recommence, ainsi de suite...

1) En utilisant la même méthode et à l'aide d'un quadrillage 10×10, donne la liste de tous les nombres premiers inférieurs à 100.

2)

Définitions : On dit que deux nombres sont **premiers jumeaux** si ce sont des nombres premiers et que leur différence vaut 2.
Exemple : 3 et 5 sont des nombres premiers jumeaux car ils sont premiers et leur différence vaut 2.

À l'aide de la question 1) trouve tous les couples de nombres premiers jumeaux inférieurs à 100.

3) Le nombre pair 12 peut s'écrire comme une somme de deux nombres premiers : 5+7. De même le nombre pair 14 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers : 7+7.
Montrer que les nombres pairs et supérieurs à 2 suivants peuvent s'écrire comme une somme de deux nombres premiers : 26 ; 54 ; 82 ; 60.

On sait depuis l'Antiquité qu'il existe une infinité de nombres premiers, Euclide l'avait démontré il y a plus de 2000 ans mais à l'heure actuelle et même si on en a la quasi certitude, personne ne sait démontrer si il y a une infinité de nombres premiers jumeaux et personne ne sait non plus démontrer si tous les nombres pairs supérieurs à 2 peuvent s'écrire comme la somme de deux nombres premiers, c'est ce que les mathématiciens appellent la conjecture de Goldbach (récompense de 1 000 000 de dollars pour la preuve).

II - P.G.C.D.

Un artisan désire poser du carrelage de forme carré dans une pièce rectangulaire dont les dimensions sont 12,30 mètres sur 7,20 mètres.
1) Quelle est en centimètre la plus grande taille de carrelage carré que l'artisan peut utiliser pour recouvrir la pièce sans avoir à découper un seul carreau ?
2) Combien faudra-t-il de carreaux au total ?

2.5 Corrigé du devoir maison

Corrigé du devoir de mathématiques

Choisis toujours le chemin qui semble le meilleur même s'il paraît plus difficile : l'habitude le rendra bientôt agréable. (Pythagore)

I - Ératosthène et les nombres premiers

Définitions : Un nombre entier est dit **premier** si il a exactement **deux** diviseurs : 1 et lui-même.
Un nombre qui n'est pas premier est dit composé.

On a rechercher tous les nombres premiers inférieur à 100 par la méthode dite du "*crible d'Ératosthène*" :

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Les nombres premiers inférieurs à 100 sont donc : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

2)

Définitions : On dit que deux nombres sont **premiers jumeaux** si ce sont des nombres premiers et que leur différence vaut 2.
Exemple : 3 et 5 sont des nombres premiers jumeaux car ils sont premiers et leur différence vaut 2.

Les couples de nombres premiers jumeaux inférieurs à 100 sont donc :
(3 ;5), (5 ;7), (11 ;13), (17 ;19), (29 ;31), (41 ;43), (59 ;61) et (71 ;73)

3) Montrer que les nombres pairs et supérieurs à 2 suivants peuvent s'écrire comme une somme de deux nombres premiers : 26 ; 54 ; 82 ; 60.

26=13+13 54=47+7 82=79+3 60=47+13.

II - P.G.C.D.

Un artisan désire poser du carrelage de forme carré dans une pièce rectangulaire dont les dimensions sont 12,30 mètres sur 7,20 mètres.
1) Quelle est en centimètre la plus grande taille de carrelage carré que l'artisan peut utiliser pour recouvrir la pièce sans avoir à découper un seul carreau ?
7,20 m = 720 cm et 12,30 m = 1230 cm. Pour ne pas avoir à couper de carrelage, le côté du carré doit diviser la longueur (1230 cm) et la largeur (720 cm) de la pièce. La plus grande taille de carrelage qui répond au problème est donc le PGCD de 1230 et 720 que l'on calcul avec la méthode de son choix. On trouve PGCD(1230 ;720)=30.
2) Combien faudra-t-il de carreaux au total ?
$1230 \div 30 = 41$ **et** $720 \div 30 = 24$, **il y aura donc 41 carreaux pour la longueur de la pièce et 24 carreaux pour la largeur de la pièce soit** $41 \times 24 = 984$ **carreaux au total.**

2.6 Contrôle

Contrôle de mathématiques

À vaincre sans péril on triomphe sans gloire (P. Corneille)

Exercice 1 : Extrait du brevet de Polynésie française 2007.

On donne l'expression $D = (2-5x)(4x+3)+(2-5x)^2$.
1.Développer, réduire et ordonner D.
2.Calculer D pour $x = -1$.

Exercice 2 : Extrait du brevet de Polynésie française 2007.

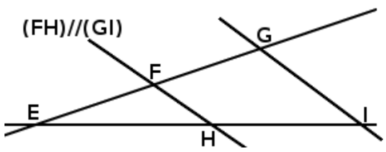
Écrire A sous forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{7}{6}-2}$$

Exercice 3 : Extrait du brevet de Polynésie française 2007.

On donne $B = \dfrac{4\times 10^{-2}\times 9\times 10^{6}}{6\times 10^{7}\times 12\times (10^{3})^{2}}$, donner l'écriture scientifique de B.

Exercice 4



On donne EF = 3 km ; EG = 7 km ;
GI = 5,25 km et EH=4,5km.
Calculer FH et EI.

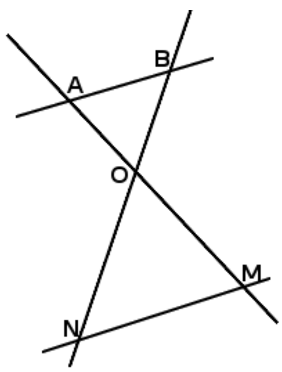
Exercice 5 : Extrait du brevet d'Amérique du Nord 2008.

La figure n'est pas en vraie grandeur ; on ne demande pas de la reproduire.

Les droites (AM) et (BN) sont sécantes en O. Les dimensions sont en centimètres.
On donne : OA = 3 ; OB = 2,5 ; OM = 5,4 ; ON = 4,5.
1. Montrer que les droites (AB) et (MN) sont parallèles.
2. On suppose que AB = 1,2. Calculer la distance MN.
3. Choisir parmi les quatre nombres suivants :

a) 0,55 b) 1,8 c)3,24 d)3,6

celui qui est égal à $\dfrac{\text{aire du triangle OMN}}{\text{aire du triangle OAB}}$, justifier.



Barème : 4/3/3/4/6

2.7 Corrigé du contrôle

Corrigé du contrôle de mathématiques

À vaincre sans péril on triomphe sans gloire (P. Corneille)

<u>Exercice 1</u> : Extrait du brevet de Polynésie française 2007.

On donne l'expression $D = (2-5x)(4x+3)+(2-5x)^2$.

1.Développer, réduire et ordonner D.
$D = 8x+6-20x^2-15x+(4-10x-10x+25x^2)$
$D = 8x+6-20x^2-15x+4-10x-10x+25x^2$
$\boxed{D = 5x^2-27x+10}$

2.Calculer D pour $x=-1$.
$5\times(-1)^2-27\times(-1)+10 = 5+27+10 = \boxed{42}$

<u>Exercice 2</u> : Extrait du brevet de Polynésie française 2007.

Écrire A sous forme d'une fraction irréductible :

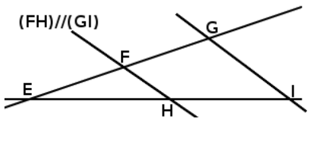
$$A = \frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{7}{6}-2} = \frac{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}}{\frac{7}{6}-\frac{12}{6}} = \frac{\frac{-2}{3}}{\frac{-5}{6}} = \frac{-2}{3}\times\frac{6}{-5} = \frac{2}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}\times 2}{5} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

<u>Exercice 3</u> : Extrait du brevet de Polynésie française 2007.

On donne $B = \dfrac{4\times10^{-2}\times9\times10^{6}}{6\times10^{7}\times12\times(10^3)^2}$, donner l'écriture scientifique de B.

$$B = \frac{4\times9}{6\times12}\times\frac{10^{-2}\times10^{6}}{10^{7}\times(10^3)^2} = \frac{36}{72}\times\frac{10^4}{10^{13}} = 0,5\times10^{-9} = 5\times10^{-1}\times10^{-9} = \boxed{5\times10^{-10}}$$

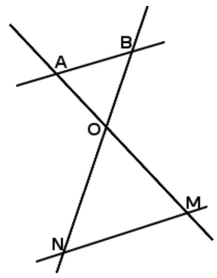
<u>Exercice 4</u>



On donne EF = 3 km ; EG = 7 km ; GI = 5,25 km et EH=4,5km. Calculer FH et EI.
Les points E,F,G et E,H,I sont alignés et (FH)//(GI), donc d'après le théorème de Thalès, on a :
$\dfrac{EF}{EG} = \dfrac{EH}{EI} = \dfrac{FH}{GI}$ ou encore : $\dfrac{3}{7} = \dfrac{4,5}{EI} = \dfrac{FH}{5,25}$ et avec des produits en croix :
$EI = \dfrac{7\times4,5}{3} = \boxed{10,5}$ et $FH = \dfrac{5,25\times3}{7} = \boxed{2,25}$

Exercice 5 : Extrait du brevet d'Amérique du Nord 2008.

Les droites (AM) et (BN) sont sécantes en O. Les dimensions sont en centimètres.
On donne : OA = 3 ; OB = 2,5 ; OM = 5,4 ; ON = 4,5.
1. Montrer que les droites (AB) et (MN) sont parallèles.



$\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{5,4}{3} = 1,8$ et $\dfrac{ON}{OB} = \dfrac{4,5}{2,5} = 1,8$

Les points A,O,M et B,O,N sont alignés dans le même ordre et $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{ON}{OB}$, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

2. On suppose que AB = 1,2. Calculer la distance MN.
Les points A,O,M et B,O,N sont alignés et (AB)//(MN) donc d'après le théorème de Thalès on a :
$\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{ON}{OB} = \dfrac{MN}{AB}$ ou encore : $\dfrac{5,4}{3} = \dfrac{4,5}{2,5} = \dfrac{MN}{1,2}$ soit en faisant un produit en croix :
$MN = \dfrac{4,5 \times 1,2}{2,5} = \boxed{2,16}$
3. Choisir parmi les quatre nombres suivants : a) 0,55 b) 1,8 c)3,24 d)3,6

celui qui est égal à $\dfrac{\text{aire du triangle OMN}}{\text{aire du triangle OAB}}$, justifier. Ici, le triangle OMN est un agrandissement du triangle OAB et le rapport de cet agrandissment est $\dfrac{5,4}{3} = 1,8$, d'après le cours, l'aire est donc multipliée par $1,8^2 = \boxed{3,24}$.

Chapitre 3

Statistiques

3.1 Séries statistiques et moyennes (Rappels)

Définition 9.

Une **série statistique** est la donnée simultanée de valeurs rangées dans l'ordre croissant et d'effectifs associées à ces valeurs.

Exemple :
Au dernier contrôle de mathématiques les élèves d'une classe ont eu les notes suivantes :
2 ;7 ;13 ;1 ;15 ;12 ;11 ;7 ;1 ;15 ;14 ;12 ;11 ;18 ;11 ;13 ;13 ;10 ;10 ;10
On a donc la série statistique suivante :

Notes de la classe	1	2	7	10	11	12	13	14	15	18
Effectifs	2	1	2	3	3	2	3	1	2	1

Définition 10.

La **moyenne** d'une série statistique est la moyenne des valeurs de la série pondérées par les effectifs.

Exemple :

Dans l'exemple précédent la moyenne de la série statistique est donnée par le calcul :

$$\frac{1\times 2+2\times 1+7\times 2+10\times 3+11\times 3+12\times 2+13\times 3+14\times 1+15\times 2+18\times 1}{2+1+2+3+3+2+3+1+2+1}$$

$$\frac{206}{20}$$

$$\boxed{10,3}$$

3.2 Étendue et médiane

Définition 11.

L'**étendue** d'une série statistique est la différence entre les valeurs extrêmes de cette série. (Parfois on parle aussi d'amplitude)

Exemple :

Dans le premier exemple, les valeurs extrêmes sont 1 et 18, l'étendue de la série statistique est donc : $18 - 1 = \boxed{17}$

Définition 12.

On appelle **médiane** d'une série statistique n'importe quelle nombre m tel qu'au moins la moitié des valeurs de la série sont inférieures ou égales à m et au moins la moitié des valeurs de la série sont supérieures ou égales à m.

Exemples :

1) Avec la série statistique suivante : 23,5 ; 26 ; 33 ; 37,5 ; 43 la médiane est alors 33 car la moitié des valeurs sont inférieures à 33 et la moitié sont supérieures à 33.

2) Avec la série statistique suivante : -15 ; -3 ; 2 ; 5 ; 8 ; 11 étant donné que l'effectif total est pair (ici 6), la médiane peut être toute valeur entre 2 et 5, par exemple : 3 ou 4 ou 4,2...

3) Avec l'exemple de la première partie (les notes) étant donné que l'effectif total est pair (20 élèves), la médiane est une valeur comprise entre la $10^{\text{ème}}$ et la $11^{\text{ème}}$ notes, ici on a pas le choix c'est 11 car la $10^{\text{ème}}$ et la $11^{\text{ème}}$ notes valent toutes les deux 11.

Remarques :

1) On remarque dans le deuxième exemple que la médiane n'est pas forcément un nombre de la série statistique.

2) On remarque dans le dernier exemple que la médiane peut être différente de la moyenne.

3.3 Quartiles

Définition 13.

- Le **premier quartile** d'une série statistique est la plus petite valeur de la série Q_1 telle qu'au moins un quart des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Q_1.
- Le **troisième quartile** d'une série statistique est la plus petite valeur de la série Q_3 telle qu'au moins trois quarts des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Q_3.

Exemples :

1) Avec le tout premier exemple, le premier quartile est donc la plus petite note Q_1 telle qu'au moins un quart des élèves ont une note inférieure ou égale à Q_1. Il y a 20 élèves et $\frac{20}{4} = 5$, on cherche donc la première note Q_1 telle qu'au moins 5 élèves ont une note inférieure ou égale à Q_1. On a donc $Q_1 = 7$.

2) Avec le tout premier exemple, le troisième quartile est donc la plus petite note Q_3 telle qu'au moins trois quarts des élèves ont une note inférieure ou égale à Q_3. Il y a 20 élèves et $\frac{3}{4} \times 20 = 15$, on cherche donc la première note Q_3 telle qu'au moins 15 élèves ont une note inférieure ou égale à Q_3. On a donc $Q_3 = 13$.

Remarque : Contrairement à la médiane, les quartiles sont toujours des valeurs de la série.

3.4 Interrogation écrite

Interrogation de mathématiques

Il y a trois sortes de mensonges : les mensonges, les sacrés mensonges et les statistiques. (Mark Twain)

Exercice 1 :
On relevé la fréquence en gigahertz (GHz) du processeur de plusieurs ordinateurs, on obtient les résultats suivants :

GHz	0,8	1,06	1,6	1,8	2	2,93	3	3,06	3,16	3,33
Effectifs	2	5	5	8	9	4	7	5	6	2

En rédigeant correctement, donner dans l'ordre : la moyenne (arrondie au centième), l'étendue, la médiane, le premier et le troisième quartile de cette série statistique.

Exercice 2 :
Voici une série statistique : x ; 14 ; 18,3 ; 26,7 ; y
Retrouver les valeurs de x et y sachant que l'étendue de cette série est 25 et sa moyenne est 20.

Bonus :

5	A	B	26	C

Trouver A, B, C de telle façon que chaque nombre soit la moyenne des deux nombres qui l'entourent.

Barème : 8/2/1

3.5 Corrigé de l'interrogation écrite

Corrigé de l'interrogation de mathématiques

Il y a trois sortes de mensonges : les mensonges, les sacrés mensonges et les statistiques. (Mark Twain)

Exercice 1 :
On relevé la fréquence en gigahertz (GHz) du processeur de plusieurs ordinateurs, on obtient les résultats suivants :

GHz	0,8	1,06	1,6	1,8	2	2,93	3	3,06	3,16	3,33
Effectifs	2	5	5	8	9	4	7	5	6	2

- Il y a en tout : $2+5+5+8+9+4+7+5+6+2=53$ valeurs dans cette série (pas toutes différentes). Pour calculer la moyenne on multiplie chaque fréquence par son effectif, on ajoute ces résultats et on divise le tout par 53. On obtient : $\frac{120{,}94}{53} \simeq \boxed{2,28}$.

- L'étendue est : $3,33-0,8=\boxed{2,53}$

- Il y a 53 valeurs, c'est un nombre impair, $\frac{53}{2}=26,5$, la médiane est donc la $27^{\text{ème}}$ valeur : $\boxed{2}$.

- $\frac{53}{4}=13,25$, le premier quartile est donc la $14^{\text{ème}}$ valeur : $\boxed{1,8}$.
  $\frac{3}{4}\times 53=39,75$, le troisième quartile est donc la $40^{\text{ème}}$ valeur : $\boxed{3}$.

Exercice 2 :
Voici une série statistique : x ; 14 ; 18,3 ; 26,7 ; y
Retrouver les valeurs de x et y sachant que l'étendue de cette série est 25 et sa moyenne est 20.

$y-x=25$ donc $y=25+x$

$\frac{x+14+18,3+26,7+y}{5}=20$ ce qui donne en remplaçant y par $25+x$:

$\frac{x+14+18,3+26,7+25+x}{5}=20$ ou encore :

$x+14+18,3+26,7+25+x=100$

$2x+84=100$ donc

$x = \dfrac{100-84}{2} = \boxed{8}$ et $y = 25 + x = 25 + 8 = \boxed{33}$.

<u>Bonus</u> :

5	A	B	26	C

Trouver A, B, C de telle façon que chaque nombre soit la moyenne des deux nombres qui l'entourent.

• On a d'après l'énoncé : $\frac{B+5}{2} = A$ donc $B + 5 = 2A$ ou encore : $\boxed{B = 2A - 5}$.

• On a d'après l'énoncé : $\frac{A+26}{2} = B$ donc en remplaçant B par ce que l'on a trouvé précédemment : $\frac{A+26}{2} = 2A - 5$ équation que l'on peut résoudre :
$\frac{A+26}{2} = 2A - 5$
$A + 26 = 2 \times (2A - 5)$
$A + 26 = 4A - 10$
$36 = 3A$
$A = \frac{36}{3} = \boxed{12}$
Et comme $B = 2A - 5 = 2 \times 12 - 5 = \boxed{19}$

• On a d'après l'énoncé : $\frac{B+C}{2} = 26$ or $B = 19$ donc $\frac{19+C}{2} = 26$ on résout l'équation :
$19 + C = 2 \times 26$
$C = 52 - 19 = \boxed{33}$

Chapitre 4

Calcul littéral

4.1 Rappels : distributions simple et double

Propriété 7.

Si a, b, c, d et k sont des nombres alors :
$$\boldsymbol{k(a+b)=ka+kb} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd}$$

Exemples :

$A=-4x(6-5x)$ $A=-24x+20x^2$	Il faut d'abord repérer les termes : $-4x$; 6 et $-5x$, puis on multiplie ensuite ces termes : $-4x\times 6=-24x$ et $-4x\times -5x=+20x^2$

$B=(-5x+2)(3x-5)$ $B=-15x^2+25x+6x-10$ $B=-15x^2+31x-10$	On repère d'abord les termes : $-5x$; $+2$; $3x$ et -5, on multiplie ensuite ces termes : $-5x\times 3x=-15x^2$; $-5x\times -5=25x$; $+2\times 3x=6x$ et $2\times(-5)=-10$ et on regroupe les termes de même nature (les termes en x ensemble).

4.2 Identités remarquables

4.2.1 Première identité remarquable

Propriété 8.

Si a et b sont des nombres alors :

$$\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+\underbrace{2\times a\times b}_{\text{double produit}}+b^2}$$

Exemples :

- $(3x+5)^2=(3x)^2+\underbrace{2\times 3x\times 5}_{\text{double produit}}+5^2=9x^2+30x+25$
- $(5+x)^2=5^2+2\times 5\times x+x^2=25+10x+x^2$
- $(25+7x)^2=25^2+2\times 25\times 7x+(7x)^2=625+350x+49x^2$

4.2.2 Seconde identité remarquable

Propriété 9.

Si a et b sont des nombres alors :

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} - \underbrace{\mathbf{2}\times\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}_{\text{double produit}} + \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}$$

Exemples :

- $(x-7)^2 = x^2 - 2\times x\times 7 + 7^2 = x^2 - 14x + 49$
- $(9-4x)^2 = 9^2 - 2\times 9\times 4x + (4x)^2 = 81 - 72x + 16x^2$

4.2.3 Troisième identité remarquable

Propriété 10.

Si a, b sont des nombres alors :

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}$$

Exemples :

- $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$
- $(3-x)(3+x) = 9 - x^2$
- $(4+5x)(4-5x) = 4^2 - (5x)^2 = 16 - 25x^2$

4.3 Exemples d'utilisation des identités remarquables dans le calcul mental

• Pour calculer mentalement : 998^2 de manière simple, il faut faire apparaître le plus de zéros possibles sans s'éloigner de la valeur 998. Nous écrivons donc :
$998^2 = (1000-2)^2$. On reconnaît la deuxième identité remarquable avec $1000 = a$ et $2 = b$. En appliquant la formule, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, nous obtenons :
$998^2 = (1000-2)^2 = 1000^2 - 2\times 1000\times 2 + 2^2 = 1000000 - 4000 + 4 = 996004$

• Pour calculer mentalement : 303×297, on va se servir du nombre 300, $303 = 300+3$ et $297 = 300-3$, nous écrivons donc :
$303\times 297 = (300+3)(300-3)$. On reconnaît la troisième identité remarquable avec $300 = a$ et $3 = b$. En appliquant la formule, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, nous obtenons :
$303\times 297 = (300+3)(300-3) = 300^2 - 3^2 = 90000 - 9 = 89991$

4.4 Factorisation

***Principe* : il s'agit dans la pratique de faire le contraire de la distibution, on va donc transformer une somme ou différence de termes en produit de facteurs. On a plusieurs cas possibles :**

4.4.1 Cas du facteur commun

Il n'y a pas de formule miracle, il faut "avoir l'oeil" et repérer un facteur qui est en commun dans chaque terme.

Exemples :

• $\underline{(x+2)}(x-5)+12\underline{(x+2)}$ le facteur commun est $(x+2)$, cette expression littéral est donc égale à :

$(x+2)(x-5+12) \;=\; (x+2)(x+7)$
À l'intérieur de la deuxième parenthèse on met tout ce qui n'est pas "facteur commmun" (qui n'est pas souligné). Puis on réduit cette dernière parenthèse avec : $-5+12=+7$

• $5x^2-3\underline{x}$ ici le facteur commun est x car il ne faut pas oublier que $x^2=\underline{x}\times x$, cette expression littéral est donc égale à : $5x\underline{x}-3\underline{x}=x(5x-3)$

• $(x+5)(x-8)+(x+5)^2$ là encore il ne faut pas oublier que $(x+5)^2=\underline{(x+5)}(x+5)$, l'expression factorisée est donc : $(x+5)\left[(x-8)+(x+5)\right]=(x+5)(2x-3)$

4.4.2 Cas des identités remarquables

Là encore, **il faut "avoir l'oeil" et <u>reconnaître</u>** l'une des formes développées des identités remarquables.

Exemples :

• $x^2-64=x^2-8^2$
Ici on peut reconnaître la forme développée "a^2-b^2" de la troisième identité remarquable avec $x=a$ et $8=b$. Nous savons que $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, nous pouvons donc écrire : $x^2-64=(x+8)(x-8)$

• $(x+3)^2-(x+1)^2$
Là encore, il s'agit de la troisième identité remarquable avec $x+3=a$ et $x+1=b$. Nous pouvons donc écrire : $(x+3)^2-(x+1)^2=\left[(x+3)+(x+1)\right]\left[(x+3)-(x+1)\right]=(2x+4)\times 2$

• $x^2+12x+36=x^2+2\times 6\times x+6^2$
Après transformation, on reconnaît la première identité remarquable, avec $x=a$ et $6=b$, nous pouvons donc écrire : $x^2+12x+36=(x+6)^2$

• $25x^2-30x+9=(5x)^2-2\times 5x\times 3+3^2$
Après transformation, on reconnaît la deuxième identité remarquable, avec $5x=a$ et $3=b$, nous pouvons donc écrire : $25x^2-30x+9=(5x-3)^2$

4.5 Fiche d'exercices sur la distribution

Fiche d'exercices sur le développement et la réduction pour élèves de $3^{\text{ème}}$

Niveau $5^{\text{ème}}$

Développer et réduire :

$A = 3(x+7)$ $B = 5(x-3)$ $C = x(x-8)$ $D = (5t-3)t$

Niveau $4^{\text{ème}}$

Développer et réduire :

$E = (x+1)(x+2)$ $F = (x-3)(x+2)$ $G = (2x+7)(x-5)$ $H = (7-2x)(3x-5)$

$I = 2x(x-5) + (x-2)(x+7)$ $J = (x+1)(3x-2) - (x-7)(3x-4)$

Niveau $3^{\text{ème}}$ (simple)

Développer avec les identités remarquables :

$K = (x+5)^2$ $L = (3x+7)^2$ $M = (x-3)^2$ $N = (6x-5)^2$ $O = (x+4)(x-4)$ $P = (3x+5)(3x-5)$

Niveau $3^{\text{ème}}$ (moyen)

Développer et réduire :

$Q = (2x+3)^2 - (x-8)^2$ $R = (5-7x)^2 - (2+3x)(2-3x)$

Calculer mentalement :

$S = 83 \times 77$

$T = 498^2$

Développer et réduire :

$U = (x+1)^2 - (x-1)(x+1)$

En déduire mentalement :

$V = 1001^2 - 999 \times 1001$

Niveau $3^{\text{ème}}$ (difficile)

Développer et réduire :

$$W = \left(\frac{2}{3}x - 6\right)^2 - \left(\frac{11}{6} - \frac{7}{2}x\right)\left(\frac{11}{6} + \frac{7}{2}x\right)$$

4.6 Corrigé de la fiche d'exercices sur la distribution

Corrigé de la fiche d'exercices sur le développement et la réduction

Niveau $5^{\text{ème}}$

Développer et réduire :

$A = 3(x+7)$	$B = 5(x-3)$	$C = x(x-8)$	$D = (5t-3)t$
$A = 3x + 21$	$B = 5x - 15$	$C = x^2 - 8x$	$D = 5t^2 - 3t$

Niveau $4^{\text{ème}}$

Développer et réduire :

$E = (x+1)(x+2)$	$F = (x-3)(x+2)$	$G = (2x+7)(x-5)$	$H = (7-2x)(3x-5)$
$E = x^2 + 2x + 1x + 2$	$F = x^2 + 2x - 3x - 6$	$G = 2x^2 - 10x + 7x - 35$	$H = 21x - 35 - 6x^2 + 10x$
$E = x^2 + 3x + 2$	$F = x^2 - x - 6$	$G = 2x^2 - 3x - 35$	$H = -6x^2 + 31x - 35$

$I = 2x(x-5) + (x-2)(x+7)$

$I = \overbrace{2x^2 - 10x} + \overbrace{x^2 + 7x - 2x - 14}$

$I = 3x^2 - 5x - 14$

$I = 3x^2 - 5x - 14$

$J = (x+1)(3x-2) - (x-7)(3x-4)$

$J = \overbrace{3x^2 - 2x + 3x - 2} - \overbrace{(3x^2 - 4x - 21x + 28)}$

$J = 3x^2 - 2x + 3x - 2 - 3x^2 + 4x + 21x - 28$

$J = 26x - 30$

Niveau $3^{\text{ème}}$ (simple)

Développer avec les identités remarquables :

$K = (x+5)^2$
$K = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2$
$K = x^2 + 10x + 25$

$L = (3x+7)^2$
$L = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 7 + 7^2$
$L = 9x^2 + 42x + 49$

$M = (x-3)^2$
$M = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2$
$M = x^2 - 6x + 9$

$N = (6x-5)^2$
$N = (6x)^2 - 2 \times 6x \times 5 + 5^2$
$N = 36x^2 - 60x + 25$

$O = (x+4)(x-4)$
$O = x^2 - 4^2$
$O = x^2 - 16$

$P = (3x+5)(3x-5)$
$P = (3x)^2 - 5^2$
$P = 9x^2 - 25$

Niveau $3^{\text{ème}}$ (moyen)

Développer et réduire :

$Q = (2x+3)^2 - (x-8)^2$
$Q = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 - (x^2 - 2 \times x \times 8 + 8^2)$
$Q = 4x^2 + 12x + 9 - x^2 + 16x - 64$
$Q = 3x^2 + 28x - 55$

$R = (5-7x)^2 - (2+3x)(2-3x)$
$R = 5^2 - 2 \times 5 \times 7x + (7x)^2 - \left(2^2 - (3x)^2\right)$
$R = 25 - 70x + 49x^2 - 4 + 9x^2$
$R = 58x^2 - 70x + 21$

Calculer mentalement :
$S = 83 \times 77$
$S = (80+3)(80-3) = 80^2 - 3^2 = 6400 - 9 = 6391$

$T = 498^2$
$T = (500-2)^2 = 500^2 - 2 \times 500 \times 2 + 2^2 = 248004$

Développer et réduire :
$U = (x+1)^2 - (x-1)(x+1)$
$U = x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 1^2)$
$U = x^2 + 2x + 1 - x^2 + 1$
$U = 2x + 2$
En déduire mentalement :
$V = 1001^2 - 999 \times 1001$
$V = (1000+1)^2 - (1000-1)(1000+1)$,c'est U quand $x = 1000$
$V = 2 \times 1000 + 2 = 2002$

Niveau 3$^{\text{ème}}$ (difficile)

Développer et réduire :

$$\begin{aligned}W = \left(\frac{2}{3}x-6\right)^2-\left(\frac{11}{6}-\frac{7}{2}x\right)\left(\frac{11}{6}+\frac{7}{2}x\right) &= \left(\frac{2}{3}x\right)^2-2\times\frac{2}{3}x\times 6+6^2-\left(\left(\frac{11}{6}\right)^2-\left(\frac{7}{2}x\right)^2\right)\\ &= \frac{4}{9}x^2-8x+36-\frac{121}{36}+\frac{49}{4}x^2\\ &= \frac{457}{36}x^2-8x+\frac{1175}{36}\end{aligned}$$

4.7 Devoir maison

Devoir de mathématiques

Qui veut faire quelque chose trouve un moyen,
Qui ne veut rien faire trouve une excuse (Proverbe arabe)

I- Calcul littéral (c'est pour bientôt) :

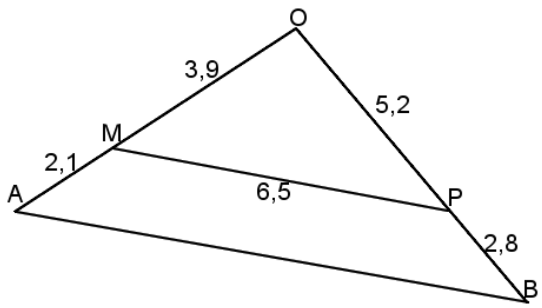
On considère l'expression $E = 4x^2 - 9 + (2x + 3)(x - 2)$.

1. Développer et réduire l'expression E.
2. Factoriser $4x^2 - 9$.
3. En déduire une factorisation de l'expression E.
4. Calculer E quand $x = \dfrac{-3}{2}$, puis quand $x = \dfrac{5}{3}$.

II- Géométrie (pour le bonheur de tous) :

(Sur la figure ci-dessous les unités ne sont pas respectées)

1. Montrer que les droites (MP) et (AB) sont parallèles.
2. Calculer la longueur AB.
3. Montrer que le triangle OAB est rectangle en O.



Barème : Chaque question vaut un point et demi sauf I- 4. qui vaut 1 point.

4.8 Corrigé du devoir maison

Corrigé du devoir de mathématiques

Qui veut faire quelque chose trouve un moyen,
Qui ne veut rien faire trouve une excuse (Proverbe arabe)

I- Calcul littéral (c'est pour bientôt) :

On considère l'expression $E = 4x^2 - 9 + (2x+3)(x-2)$.

1. **Développer et réduire l'expression E.**
   $E = 4x^2 - 9 + (2x+3)(x-2)$
   $E = 4x^2 - 9 + 2x^2 - 4x + 3x - 6$
   $E = 6x^2 - x - 15$

2. **Factoriser $4x^2 - 9$.**
   $4x^2 - 9$
   $(2x)^2 - 3^2$
   $(2x+3)(2x-3)$, c'est la troisième identité remarquable factorisée.

3. **En déduire une factorisation de l'expression E.**
   $E = \quad 4x^2 - 9 \quad + \quad (2x+3)(x-2)$
   $E = \overbrace{\underline{(2x+3)}(2x-3)} + \underline{(2x+3)}(x-2)$
   $E = \underline{(2x+3)}(2x-3+x-2)$
   $E = (2x+3)(3x-5)$

4. **Calculer E quand $x = \dfrac{-3}{2}$, puis quand $x = \dfrac{5}{3}$.**
   On va remplacer x dans la dernière expression trouvée.
   - Si $x = \dfrac{-3}{2}$ alors la première parenthèse s'écrit : $(\cancel{2} \times \frac{-3}{\cancel{2}} + 3) = (-3+3) = 0$ et donc $E = 0$.
   - Si $x = \dfrac{5}{3}$ alors la deuxième parenthèse s'écrit : $(\cancel{3} \times \frac{5}{\cancel{3}} - 5) = (5-5) = 0$ et donc $E = 0$.

<ins>Remarque</ins> : $\frac{-3}{2}$ et $\frac{5}{3}$ sont donc les solutions de l'équation $E = 0$.

II- Géométrie (pour le bonheur de tous) :

(Sur la figure ci-dessous les unités ne sont pas respectées)

1. **Montrer que les droites (MP) et (AB) sont parallèles.**

   Les points O,M,A et O,P,B sont alignés dans le même ordre, de plus :

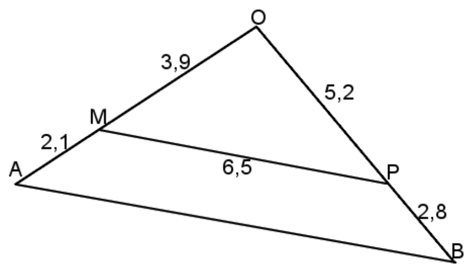
   $\frac{OM}{OA} = \frac{3,9}{3,9+2,1} = \frac{3,9}{6} = 0,65$ et $\frac{OP}{OB} = \frac{5,2}{5,2+2,8} = \frac{5,2}{8} = 0,65$

   Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les doites (MP) et (AB) sont parallèles.

2. **Calculer la longueur AB.**
   Les points O,M,A et O,P,B sont alignés et les doites (MP) et (AB) sont parallèles.
   D'après le théorème de Thalès, on a alors l'égalité : $\frac{OM}{OA} = \frac{OP}{OB} = \frac{MP}{AB}$ et donc $\frac{MP}{AB} = 0,65$ d'où $AB = \frac{6,5}{0,65} = 10$.

3. **Montrer que le triangle OAB est rectangle en O.**
   OAB est un triangle dont le plus grand côté est $AB = 10$, on connait aussi $OA = 6$ et $OB = 8$.

AB^2	$OA^2 + OB^2$
10^2	$6^2 + 8^2$
100	$36 + 64 = 100$



Donc, $AB^2 = OA^2 + OB^2$, et d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle OAB est bien rectangle en O.

4.9 Contrôle 1

Contrôle de mathématiques

Il n'existe que deux choses infinies, l'univers et la bêtise humaine... mais pour l'univers, je n'ai pas de certitude absolue. (Albert Einstein)

Exercice 1 : (Application du cours) Développer les expressions suivantes.

$A = (3x+5)^2$ $B = (x-7)^2$ $C = (2x+7)(2x-7)$

Exercice 2 : (Application du cours) Factoriser les expressions suivantes.

$D = (5x-2)(-3x+4)+5x-2$ $E = 9x^2+24x+16$

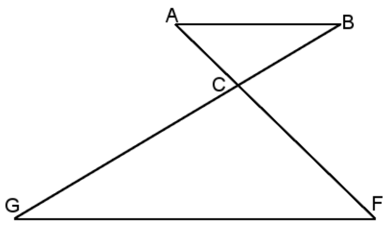
$F = 16x^2-25$ $G = x^2-6x+9$

Exercice 3 : Extrait du brevet de Pondichéry 2007.

On considère l'expression suivante : $E = (3x-5)^2 + (3x-5)(7x-4)$.

1. Développer puis réduire E.
2. Factoriser E.
3. Calculer E pour $x = 0$, puis pour $x = \frac{5}{3}$.

Exercice 4 : Extrait du brevet de Marseille 2006.



La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur et n'est pas à reproduire.
Les doites (AB) et (GF) sont parallèles. AB = 3 cm, FC = 8,4 cm et FG = 11,2 cm.

1. Calculer la longueur CA.
2. Soient D∈[CF] tel que FD = 6,3 cm et E∈[GF] tel que FE = 8,4 cm. Montrer que (GC) et (ED) sont parallèles.

Exercice 5 : Amérique du Nord 2007.

Un confiseur répartit 301 caramels et 172 chocolats dans des sachets identiques.

1. Calculer le nombre maximal de sachets réalisables.
2. Calculer le nombre de caramels et le nombre de chocolats contenus dans un sachet.

Barème : 3/4/5/4/4

4.10 Corrigé du contrôle 1

Corrigé du contrôle de mathématiques

Il n'existe que deux choses infinies, l'univers et la bêtise humaine...
mais pour l'univers, je n'ai pas de certitude absolue. (Albert Einstein)

Exercice 1 : (Application du cours) Développer les expressions suivantes.

$A = (3x+5)^2$
$A = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5^2$
$A = 9x^2 + 30x + 25$

$B = (x-7)^2$
$B = x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2$
$B = x^2 - 14x + 49$

$C = (2x+7)(2x-7)$
$C = (2x)^2 - 7^2$
$C = 4x^2 - 49$

Exercice 2 : (Application du cours) Factoriser les expressions suivantes.

$D = \underline{(5x-2)}(-3x+4) + 1\underline{(5x-2)}$
$D = \underline{(5x-2)}(-3x+4+1)$
$D = (5x-2)(-3x+5)$

$E = 9x^2 + 24x + 16$
$E = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 4 + 4^2$
$E = (3x+4)^2$

$F = 16x^2 - 25$
$F = (4x)^2 - 5^2$
$F = (4x+5)(4x-5)$

$G = x^2 - 6x + 9$
$G = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2$
$G = (x-3)^2$

Exercice 3 : Extrait du brevet de Pondichéry 2007.

1. Développer puis réduire E.

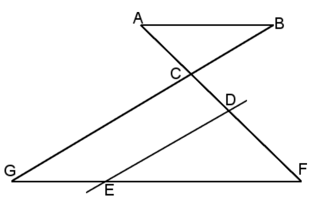
$E = \underbrace{(3x-5)^2} + \underbrace{(3x-5)(7x-4)}$
$E = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2 + 21x^2 - 12x - 35x + 20$
$E = 9x^2 - 30x + 25 + 21x^2 - 12x - 35x + 20$
$E = 30x^2 - 77x + 45 \qquad (*)$

2. Factoriser E.

$E = (3x-5)^2 + (3x-5)(7x-4)$
$E = \underline{(3x-5)}(3x-5) + \underline{(3x-5)}(7x-4)$
$E = \underline{(3x-5)}(3x-5+7x-4)$
$E = (3x-5)(10x-9) \qquad (**)$

3. Calculer E pour $x = 0$, puis pour $x = \frac{5}{3}$.
Si $x = 0$ alors $E = 45$ grâce à $(*)$. Si $x = \frac{5}{3}$ alors en remplaçant dans $(**)$, on obtient :
$E = \underbrace{\left(\cancel{3} \times \frac{5}{\cancel{3}} - 5\right)}_{0}(10x-9) = 0$

Exercice 4 : Extrait du brevet de Marseille 2006.



Les doites (AB) et (GF) sont parallèles. AB = 3 cm, FC = 8,4 cm et FG = 11,2 cm.

1. Les points A,C,F et B,C,G sont alignés et (AB)//(GF). Donc d'après le théorème de Thalès, on a :
$\frac{CA}{CF} = \frac{AB}{FG}$ soit en remplaçant : $\frac{CA}{8,4} = \frac{3}{11,2}$ d'où $CA = \frac{8,4 \times 3}{11,2} = \boxed{2,25}$
2. Soient D∈[CF] tel que FD = 6,3 cm et E∈[GF] tel que FE = 8,4 cm. Les points F,D,C et F,E,G sont <u>alignés dans le même ordre</u>.
$\frac{FD}{FC} = \frac{6,3}{8,4} = 0,75$ et $\frac{FE}{FG} = \frac{8,4}{11,2} = 0,75$, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès (GC)//(ED).

Exercice 5 : Amérique du Nord 2007.

Un confiseur répartit 301 caramels et 172 chocolats dans des sachets identiques.

1. On cherche donc le plus grand nombre qui divise à la fois 301 et 172, soit PGCD(301 ;172).

Algorithme de la division euclidienne	**Algorithme des différences**
$301 = 1 \times 172 + 129$	$301 - 172 = 129$
$172 = 1 \times 129 + \boxed{43}$	$172 - 129 = 43$
$129 = 3 \times 43 + 0$	$129 - 43 = 86$
	$86 - 43 = \boxed{43}$
	$43 - 43 = 0$

On peut donc faire au maximum 43 sachets identiques.

2. $\dfrac{301}{43} = 7$ et $\dfrac{172}{43} = 4$. Chacun de ces sachets contiendra 7 caramels et 4 chocolats.

4.11 Contrôle 2

Contrôle de mathématiques

Il n'existe que deux choses infinies, l'univers et la bêtise humaine... mais pour l'univers, je n'ai pas de certitude absolue. (Albert Einstein)

Exercice 1 : (Application du cours) Développer les expressions suivantes.

$A = (5x + 3)^2$ $B = (x - 6)^2$ $C = (3x + 4)(3x - 4)$

Exercice 2 : (Application du cours) Factoriser les expressions suivantes.

$D = (7x - 3)(-2x + 8) + 7x - 3$ $E = 16x^2 + 24x + 9$

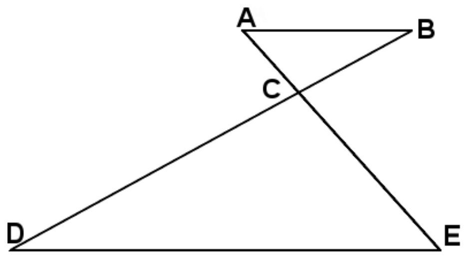
$F = 49x^2 - 36$ $G = x^2 - 16x + 64$

Exercice 3 : Type brevet, Pondichéry 2007.

On considère l'expression suivante : $H = (7x - 4)^2 + (7x - 4)(3x + 10)$.

1. Développer puis réduire H.
2. Factoriser H.
3. Calculer H pour $x = 0$, puis pour $x = \frac{4}{7}$.

Exercice 4 : Type brevet, Marseille 2006.



La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur et n'est pas à reproduire.
Les droites (AB) et (DE) sont parallèles. AB=7 cm ; EC=11,85 cm et DE= 15,8 cm.

1. Calculer la longueur CA.
2. Soient F∈[EC] tel que $EF = 6$ et G∈[ED] tel que $EG = 8$. Montrer que (FG) et (CD) sont parallèles.

Exercice 5 : Type brevet, Amérique du Nord 2007.

Un confiseur répartit 3245 caramels et 2301 chocolats dans des boîtes identiques.

1. Calculer le nombre maximal de boîtes réalisables.
2. Calculer le nombre de caramels et le nombre de chocolats contenus dans une boîte.

4.12 Corrigé du contrôle 2

Corrigé du contrôle de mathématiques

Il n'existe que deux choses infinies, l'univers et la bêtise humaine... mais pour l'univers, je n'ai pas de certitude absolue. (Albert Einstein)

Exercice 1 : (Application du cours) Développer les expressions suivantes.

$A = (5x+3)^2$
$A = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 3 + 3^2$
$A = 25x^2 + 30x + 9$

$B = (x-6)^2$
$B = x^2 - 2 \times x \times 6 + 6^2$
$B = x^2 - 12x + 36$

$C = (3x+4)(3x-4)$
$C = (3x)^2 - 4^2$
$C = 9x^2 - 16$

Exercice 2 : (Application du cours) Factoriser les expressions suivantes.

$D = \underline{(7x-3)}(-2x+8) + 1\underline{(7x-3)}$
$D = \underline{(7x-3)}(-2x+8+1)$
$D = (7x-3)(-2x+9)$

$E = 16x^2 + 24x + 9$
$E = (4x)^2 + 2 \times 4x \times 3 + 3^2$
$E = (4x+3)^2$

$F = 49x^2 - 36$
$F = (7x)^2 - 6^2$
$F = (7x+6)(7x-6)$

$G = x^2 - 16x + 64$
$G = x^2 - 2 \times x \times 8 + 8^2$
$G = (x-8)^2$

Exercice 3 : Extrait du brevet de Pondichéry 2007.

1. Développer puis réduire H.

$$H = \overbrace{(7x)^2 - 2 \times 7x \times 4 + 4^2}^{(7x-4)^2} + \overbrace{21x^2 + 70x - 12x - 40}^{(7x-4)(3x+10)}$$

$H = 49x^2 - 56x + 16 + 21x^2 + 58x - 40$
$H = 70x^2 + 2x - 24 \qquad (*)$

2. Factoriser H.

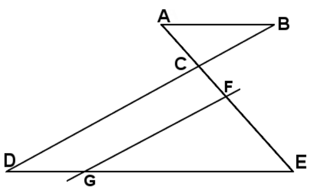
$H = (7x-4)^2 + (7x-4)(3x+10)$
$H = \underline{(7x-4)}(7x-4) + \underline{(7x-4)}(3x+10)$
$H = \underline{(7x-4)}(7x-4+3x+10)$
$H = (7x-4)(10x+6) \qquad (**)$

3. Calculer H pour $x = 0$, puis pour $x = \frac{4}{7}$.

Si $x = 0$ alors $H = -24$, grâce à $(*)$.

Si $x = \frac{4}{7}$ alors en remplaçant dans $(**)$, on obtient : $H = \underbrace{\left(\cancel{7} \times \frac{4}{\cancel{7}} - 4\right)}_{0}\left(10 \times \frac{4}{7} + 6\right) = 0$

Exercice 4 : Extrait du brevet de Marseille 2006.



Les doites (AB) et (DE) sont parallèles. AB = 7 cm, EC = 11,85 cm et DE = 15,8 cm.

1. Les points A,C,F et B,C,G sont alignés et (AB)//(DE). Donc d'après le théorème de Thalès, on a :
$\frac{CA}{CE} = \frac{AB}{DE}$ soit en remplaçant : $\frac{CA}{11,85} = \frac{7}{15,8}$ d'où $CA = \frac{11,85 \times 7}{15,8} = \boxed{5,25}$

2. Soient F∈[EC] tel que $EF = 6$ et G∈[ED] tel que $EG = 8$. Dans le triangle ECD, les points E,F,C et E,G,D sont alignés dans le même ordre et
$\frac{EF}{EC} = \frac{6}{11,85}$ et $\frac{EG}{ED} = \frac{8}{15,8}$, et $6 \times 15,8 = 8 \times 11,85 = 94,8$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès (FG)//(CD).

Exercice 5 : Amérique du Nord 2007.

Un confiseur répartit 3245 caramels et 2301 chocolats dans des boîtes identiques.

1. On cherche donc le plus grand nombre qui divise à la fois 3245 et 2301, soit PGCD(3245 ;2301).

Algorithme de la division euclidienne	**Algorithme des différences**	
$3245 = 1 \times 2301 + 944$	$3245 - 2301 = 944$	$413 - 118 = 295$
$2301 = 2 \times 944 + 413$	$2301 - 944 = 1357$	$295 - 118 = 177$
$944 = 2 \times 413 + 118$	$1357 - 944 = 413$	$177 - 118 = 59$
$413 = 3 \times 118 + \boxed{59}$	$944 - 413 = 531$	$118 - 59 = \boxed{59}$
$118 = 2 \times 59 + 0$	$531 - 413 = 118$	$59 - 59 = 0$

PGCD(3245 ;2301)=59, on peut donc faire au maximum 59 boîtes identiques.

2. $\dfrac{3245}{59} = 55$ et $\dfrac{2301}{59} = 39$. Chacune de ces boîtes contiendra 55 caramels et 39 chocolats.

Chapitre 5

Triangles rectangles

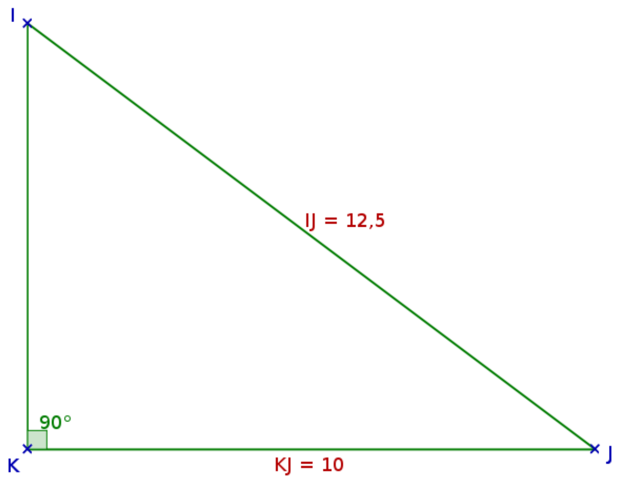
5.1 Rappels : Pythagore

5.1.1 Le théorème

Propriété 11.

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Exemple : Calculer KI



• On sait que IJK est un triangle rectangle en K, l'**hypoténuse est** $IJ = 12,5$ et $KJ = 10$.

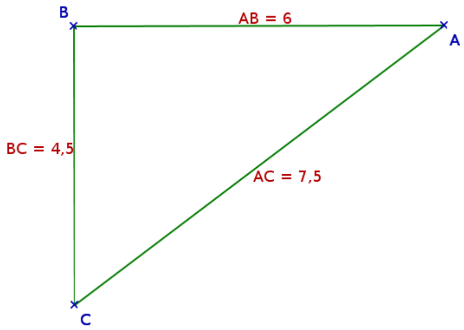
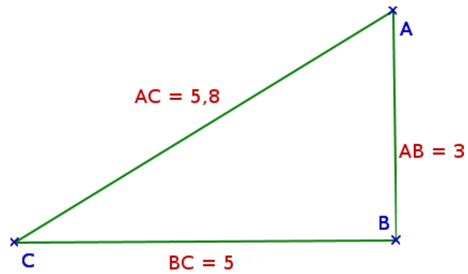
• Or, d'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité :

• $IJ^2 = KJ^2 + KI^2$
$12,5^2 = 10^2 + KI^2$
$156,25 = 100 + KI^2$
$KI^2 = 156,25 - 100$
$KI^2 = 56,25$
Donc $KI = \sqrt{56,25} = 7,5$

5.1.2 Réciproque et contraposée

Quand on ne sait pas si le triangle est rectangle mais que l'on connait les longueurs de ses côtés, il y a deux cas possibles.

<u>Exemples</u> :

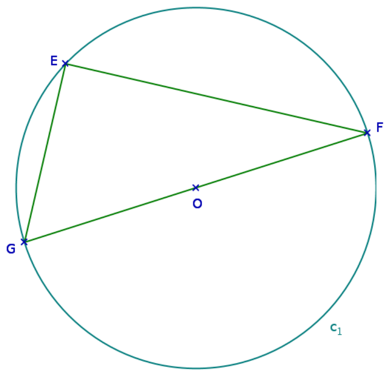
<table>
<tr><td>On veut montrer que le triangle est rectangle :
c'est la réciproque</td><td>On veut montrer que le triangle n'est pas rectangle :
c'est la contraposée</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">On commence de toute façon de la même manière, on calcule <u>**séparément**</u> le carré du plus grand côté et la somme des carrés des deux autres côtés.</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{l|l} AC^2 & BA^2 + BC^2 \\ 7,5^2 & 6^2 + 4,5^2 \\ \boxed{56,25} & 36 + 20,25 \\ & \boxed{56,25} \end{array}$</td><td>$\begin{array}{l|l} AC^2 & BA^2 + BC^2 \\ 5,8^2 & 3^2 + 5^2 \\ 33,64 & 9 + 25 \\ \boxed{33,64} & \boxed{34} \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$AC^2 = BA^2 + BC^2$
Donc d'après la <u>réciproque</u> du théorème de Pythagore le triangle ABC **est** rectangle en B.</td><td>$AC^2 \neq BA^2 + BC^2$
Donc d'après la <u>contraposée</u> du théorème de Pythagore le triangle ABC **n'est pas** rectangle.</td></tr>
</table>

5.2 Rappels : cercles et triangles inscrits

Propriété 12.

Si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre l'un de ses côtés
alors ce triangle est rectangle et son hypoténuse est le diamètre du cercle.

<u>Exemples</u> :



• On sait que EFG est inscrit dans le cercle C et [GF] est un diamètre de ce cercle.
• Or, d'après la propriété précédente,
• Donc EFG est rectangle en E et son hypoténuse est [GF].

5.3 Trigonométrie

5.3.1 Rappels sur le cosinus d'un angle aigu

On rappelle la formule de $4^{\text{ème}}$ suivante, valable pour les angles aigus d'un triangle rectangle :

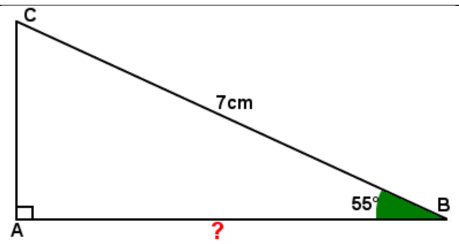
$$\boxed{\cos(\widehat{angle}) = \frac{adjacent}{hypoténuse}}$$

Exemples d'utilisations du cosinus :

1) On cherche la longueur du côté adjacent d'un angle.

ABC est un triangle rectangle en A.
$\widehat{CBA} = 55$ et l'hypoténuse [BC] mesure 7cm.

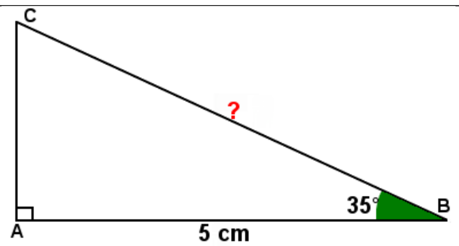
$$\cos(\widehat{CBA}) = \frac{BA}{BC}$$
$$\cos(55) = \frac{BA}{7}$$
$$BA = 7 \times \cos(55) \approx 4,02$$



2) On cherche la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

ABC est un triangle rectangle en A.
$\widehat{CBA} = 35$ et le côté adjacent à $\widehat{CBA}$: [BA] mesure 5cm.

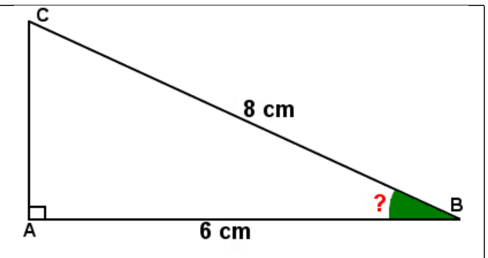
$$\cos(\widehat{CBA}) = \frac{BA}{BC}$$
$$\cos(35) = \frac{5}{BC}$$
$$BC = \frac{5}{\cos(35)} \approx 6,1$$



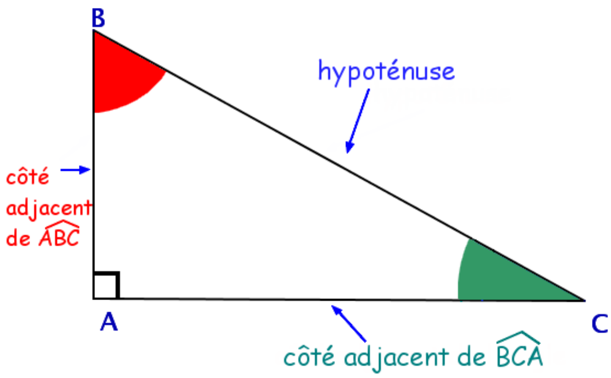
3) On cherche la mesure d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

ABC est un triangle rectangle en A.
le côté adjacent à l'angle $\widehat{CBA}$ est $AB = 6cm$ et l'hypoténuse [BC] mesure 8cm.

$$\cos(\widehat{CBA}) = \frac{BA}{BC}$$
$$\cos(\widehat{CBA}) = \frac{6}{8}$$
$$\widehat{CBA} = \text{arccos}\left(\frac{6}{8}\right) \approx 41,4$$



Remarque : Beaucoup trop d'élèves, même en troisième ne savent toujours pas ce qu'est le côté adjacent d'un angle et demande parfois en regardant un triangle rectangle : "c'est lequel le côté adjacent ?". Cette simple question montre que l'élève n'a pas compris, car on ne parle pas du côté adjacent d'un triangle mais du côté adjacent d'un angle, le côté adjacent est relatif à l'angle dont on parle.
Par exemple dans la figure ci-dessous le côté adjacent de l'angle $\widehat{ABC}$ en rouge est [BA] car l'angle $\widehat{ABC}$ a deux côtés : [BA] et [BC] mais [BC] a déjà un nom : c'est l'hypoténuse du triangle, l'autre côté de l'angle (celui qui n'est pas l'hypoténuse) est alors appelé côté adjacent de l'angle, c'est donc [BA]. Le troisième côté du triangle, [AC], est lui appelé le côté opposé de l'angle $\widehat{ABC}$.
Par contre, si l'on change d'angle et que l'on regarde cette fois-ci l'angle $\widehat{BCA}$ en vert, l'hypoténuse ne change pas : [CB], le côté adjacent de l'angle $\widehat{BCA}$ est alors [CA] et le côté opposé de l'angle $\widehat{BCA}$ est alors [BA].



5.3.2 Sinus et tangente d'un angle aigu

De même que pour le cosinus, on a par définition et pour des angles aigus dans un triangle rectangle les formules suivantes :

Définition 14.

Dans un triangle rectangle, le **sinus** d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté opposé de l'angle par la longueur de l'hypoténuse.

$$\sin\left(\widehat{angle}\right) = \frac{\textit{opposé}}{\textit{hypoténuse}}$$

Définition 15.

Dans un triangle rectangle, la **tangente** d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté opposé de l'angle par la longueur du côté adjacent de l'angle.

$$\tan\left(\widehat{angle}\right) = \frac{\textit{opposé}}{\textit{adjacent}}$$

Remarque : Deux remarques importantes s'imposent :

1. Malgré le fait qu'il y ait un lien important entre la tangente (droite vue en classe de quatrième) et la formule de la tangente écrite ci-dessus, il ne faut pas les confondre, ce sont deux objets différents qui portent le même nom.

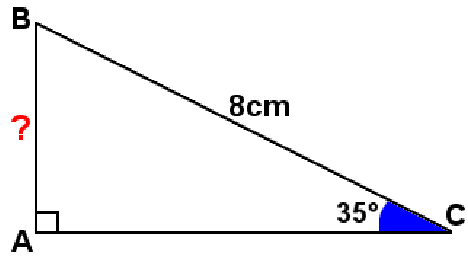
2. En classe de $3^{\text{ème}}$, ces formules servent à calculer des longueurs de côtés ou alors des mesures d'angles dans un triangle rectangle, mais c'était déjà le cas pour le cosinus, alors quel est l'intérêt de ces deux nouvelles formules ? Elles permettent d'aller plus vite dans certains cas, un exemple : si, dans un triangle rectangle, on connait le côté opposé et l'hypoténuse d'un angle que l'on cherche à calculer alors on va utiliser la formule du sinus car elle fait clairement apparaître : *opposé* et *hypoténuse*. On pourrait réussir avec le cosinus mais il faudrait appliquer la formule dans l'autre angle aigu puis utiliser la propriété qui dit que la somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180, c'est plus long...

Exemples d'utilisations du sinus :

1) On cherche la longueur du côté opposé d'un angle.

ABC est un triangle rectangle en A.
$\widehat{ACB} = 35$ et l'hypoténuse [BC] mesure 8cm.

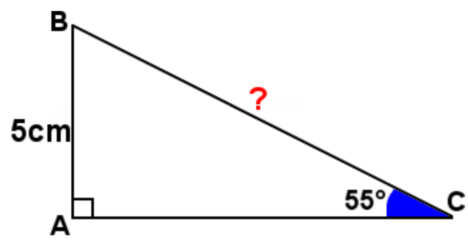
$$\sin(\widehat{ACB}) = \frac{BA}{BC}$$
$$\sin(35) = \frac{BA}{8}$$
$$BA = 8 \times \sin(35) \approx 4,59$$



2) On cherche la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

ABC est un triangle rectangle en A.
$\widehat{ACB} = 55$ et le côté opposé à $\widehat{ACB}$: [BA] mesure 5cm.

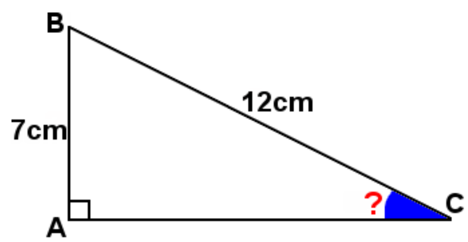
$$\sin(\widehat{ACB}) = \frac{BA}{BC}$$
$$\sin(55) = \frac{5}{BC}$$
$$BC = \frac{5}{\sin(55)} \approx 6,1$$



3) On cherche la mesure d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

ABC est un triangle rectangle en A.
le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$ est $AB = 7cm$ et l'hypoténuse [BC] mesure 12cm.

$$\sin(\widehat{ACB}) = \frac{BA}{BC}$$
$$\sin(\widehat{ACB}) = \frac{7}{12}$$
$$\widehat{ACB} = \sin^{-1}\left(\frac{7}{12}\right) \approx 35,7$$

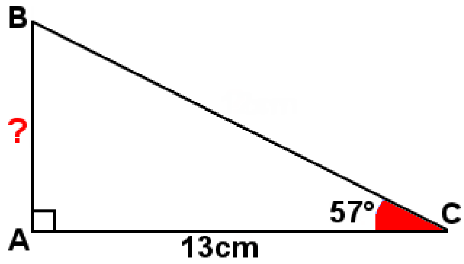


Exemples d'utilisations de la tangente :

1) On cherche la longueur du côté opposé d'un angle.

ABC est un triangle rectangle en A.
$\widehat{ACB} = 57$ et le côté adjacent [AC] mesure 13 cm.

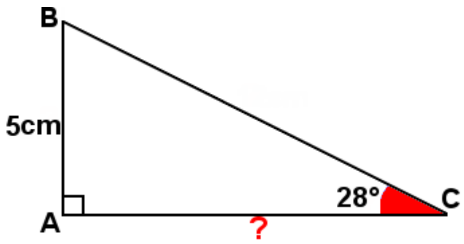
$$\tan(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{AC}$$
$$\tan(57) = \frac{AB}{13}$$
$$AB = 13 \times \tan(57) \approx 20,02$$



2) On cherche la longueur du côté adjacent d'un triangle rectangle.

ABC est un triangle rectangle en A.
$\widehat{ACB} = 28$ et le côté opposé à $\widehat{ACB}$: [AB] mesure 5cm.

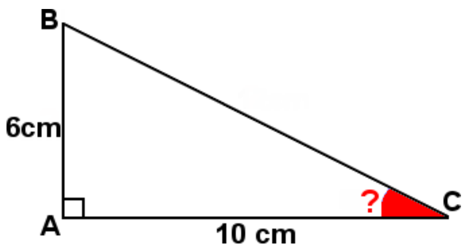
$$\tan(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{AC}$$
$$\tan(28) = \frac{5}{AC}$$
$$AC = \frac{5}{\tan(28)} \approx 9,4$$



3) On cherche la mesure d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

ABC est un triangle rectangle en A.
le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$ est $AB = 6cm$ et l'adjacent à $\widehat{ACB}$: [AC] mesure 10cm.

$$\tan(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{AC}$$
$$\tan(\widehat{ACB}) = \frac{6}{10}$$
$$\widehat{ACB} = \tan^{-1}\left(\frac{6}{10}\right) \approx 31$$



5.3.3 Deux formules de trigonométrie

Propriété 13.

Les deux formules suivantes sont valables pour tout angle aigu $\widehat{A}$ dans un triangle rectangle :

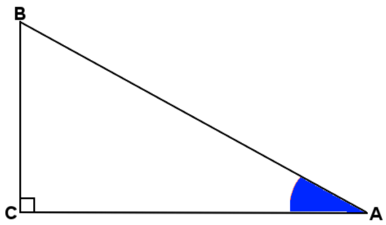
$$\sin^2\left(\widehat{A}\right) + \cos^2\left(\widehat{A}\right) = 1$$

$$\tan\left(\widehat{A}\right) = \frac{\sin\left(\widehat{A}\right)}{\cos\left(\widehat{A}\right)}$$

Remarque :

1. Quand on écrit $\sin^2\left(\widehat{A}\right)$ cela signifie bien évidemment $\sin\left(\widehat{A}\right) \times \sin\left(\widehat{A}\right)$
2. La première formule permet de calculer directement le sinus lorsque l'on connait déjà le cosinus et vice versa.
3. La seconde formule permet de calculer une des trois valeurs quand on connait déjà les deux autres.

***Preuve* !**



• D'après les formules du sinus et du cosinus, on a :

$\sin^2\left(\widehat{A}\right) = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2$ et $\cos^2\left(\widehat{A}\right) = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$ donc :

$$\sin^2\left(\widehat{A}\right) + \cos^2\left(\widehat{A}\right) = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}$$

Or d'après le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle ABC rectangle en C, $BC^2 + AC^2 = AB^2$ donc :

$$\sin^2\left(\widehat{A}\right) + \cos^2\left(\widehat{A}\right) = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1.$$

• D'après les formules du sinus et du cosinus, on a :

$$\sin\left(\widehat{A}\right) = \frac{BC}{AB} \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\widehat{A}\right) = \frac{AC}{AB} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\sin\left(\widehat{A}\right)}{\cos\left(\widehat{A}\right)} = \frac{\frac{BC}{AB}}{\frac{AC}{AB}} = \frac{BC}{\cancel{AB}} \times \frac{\cancel{AB}}{AC} = \frac{BC}{AC}$$

car diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse !

Or $\frac{BC}{AC}$ est égal par définition à $\tan\left(\widehat{A}\right)$, on a donc bien $\tan\left(\widehat{A}\right) = \frac{\sin\left(\widehat{A}\right)}{\cos\left(\widehat{A}\right)}$.

5.4 Exemple d'utilisation

Dans un triangle RST rectangle en R, on sait que $\cos\left(\widehat{RST}\right) = 0,74$**. Trouver la valeur de** $\tan\left(\widehat{RST}\right)$**.**

• On commence par utiliser la première formule pour trouver la valeur de $\sin\left(\widehat{RST}\right)$:

$\sin^2\left(\widehat{RST}\right) + \cos^2\left(\widehat{RST}\right) = 1$ autrement dit :

$\sin^2\left(\widehat{RST}\right) + 0,74^2 = 1$ donc

$\sin^2\left(\widehat{RST}\right) = 1 - 0,74^2 = 0,4524.$

Et pour finir :

$\sin\left(\widehat{RST}\right) = \sqrt{0,4524}.$

• On utilise maintenant la seconde formule pour trouver la tangente de l'angle :

$$\tan\left(\widehat{RST}\right) = \frac{\sin\left(\widehat{RST}\right)}{\cos\left(\widehat{RST}\right)} = \frac{\sqrt{0,4524}}{0,74} \approx 0,909$$

5.5 Devoir maison

Devoir de mathématiques

En mathématiques, on ne comprend pas les choses,
on s'y habitue (John Von Neumann)

Exercice 1 : Brevet Guadeloupe 2008

Voici les effectifs et les salaires des employés d'une Petite et Moyenne Entreprise (PME).

Catégorie	**Ouvrier non qualifié**	**Ouvrier qualifié**	**Cadre moyen**	**Cadre supérieur**	**Dirigeant**
Effectif	50	25	15	10	2
Salaire en euros	950	1300	1700	3500	8000

1. Quel est l'effectif de cette PME ? (1 point)
2. Calculer le salaire moyen arrondi à l'unité. (1 point)
3. Déterminer l'étendue des salaires. (1 point)
4. Déterminer la médiane ainsi que le premier et le troisième quartile. (3 points)
5. Les dirigeants décident une augmentation de 8 % du montant du salaire d'un ouvrier non qualifié. Calculer le nouveau salaire. (1,5 point)

Exercice 2 : Sujet complémentaire : vers la seconde

$G = \left(16 - 25x^2\right) - 3\,(4 - 5x)\,(3x + 9)$

1. Développer, puis réduire G. (1,5 point)
2. Calculer la valeur exacte de G lorsque : (1,5 point)
   a) $x = 0$ b) $x = -\dfrac{1}{2}$ c) $x = -5,75$.
3. On pose $H = 16 - 25x^2$. Écrire H sous la forme d'un produit de deux facteurs du premier degré. (1,5 point)
4. En déduire une écriture de G sous forme également d'un produit de facteurs du premier degré. (2 points)
5. Résoudre l'équation $G = 0$. (Cette question est facultative - pas encore vu en classe)

Exercice 3 : Brevet Martinique 2008

1. Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $AB = 8cm$, puis placer un point F sur le cercle tel que l'angle $\widehat{BAF}$ soit égal à 60. (1 point)
2. Montrer que le triangle ABF est rectangle en F. (2 points)
3. Calculer la valeur exacte de AF et donner un arrondi au mm de BF. (3 points)

Barème : 7,5 / 6,5 / 6

5.6 Corrigé du devoir maison

Devoir de mathématiques

En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue (John Von Neumann)

Exercice 1 : Brevet Guadeloupe 2008

Voici les effectifs et les salaires des employés d'une Petite et Moyenne Entreprise (PME).

Catégorie	Ouvrier non qualifié	Ouvrier qualifié	Cadre moyen	Cadre supérieur	Dirigeant
Effectif	50	25	15	10	2
Salaire en euros	950	1300	1700	3500	8000

1. **Quel est l'effectif de cette PME ?** (1 point)
   $50 + 25 + 15 + 10 + 2 = 102$; L'effectif de cette PME est de 102 employés.

2. **Calculer le salaire moyen arrondi à l'unité.** (1 point)
   C'est une moyenne pondérée par les effectifs :
   $$\frac{50 \times 950 + 25 \times 1300 + 15 \times 1700 + 10 \times 3500 + 2 \times 8000}{102} \approx 1534$$

3. **Déterminer l'étendue des salaires.** (1 point)
   $8000 - 950 = 7050$; L'étendue des salaires est de 7050 €.

4. **Déterminer la médiane ainsi que le premier et le troisième quartile.** (3 points)
   $\frac{102}{2} = 51$; La médiane est comprise entre le $51^{ème}$ et le $52^{ème}$ salaire, le salaire médian est donc de 1300 €.
   $\frac{102}{4} = 25,5$; Le premier quartile est donc le $26^{ème}$ salaire : 950 €.
   $\frac{3}{4} \times 102 = 76,5$; Le premier quartile est donc le $77^{ème}$ salaire : 1700 €.

5. **Les dirigeants décident une augmentation de 8 % du montant du salaire d'un ouvrier non qualifié. Calculer le nouveau salaire.** (1,5 point)
   $950 \times \frac{8}{100} = 76$ l'augmentation est donc de 76 €, le nouveau salaire est donc de $950 + 76 = 1026$ soit 1026 €.

Exercice 2 : Sujet complémentaire : vers la seconde

1. Développer, puis réduire G. (1,5 point)
$G = \left(16 - 25x^2\right) - 3\,(4 - 5x)\,(3x + 9)$
$G = 16 - 25x^2 - 3\left(12x + 36 - 15x^2 - 45x\right)$
$G = 16 - 25x^2 - 36x - 108 + 45x^2 + 135x$
$G = 20x^2 + 99x - 92$

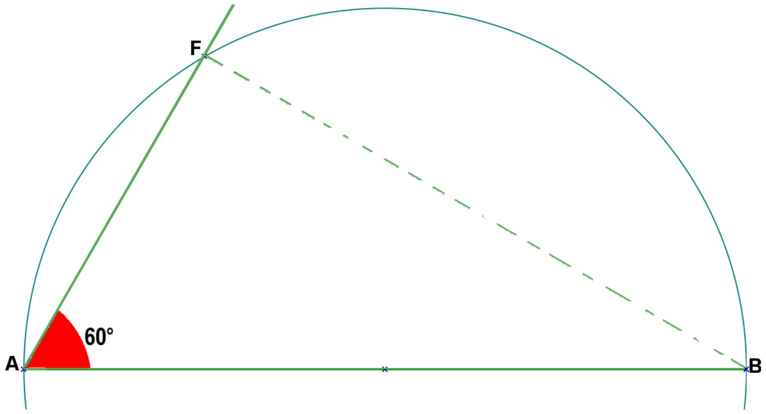
2. Calculer la valeur exacte de G lorsque : (1,5 point)
a) $x = 0$
$G = 20 \times 0^2 + 99 \times 0 - 92 = -92$
b) $x = -\frac{1}{2}$
$G = 20 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 99 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 92 = 5 - 49,5 - 92 = -136,5$
c) $x = -5,75$
$G = 20(-5,75)^2 + 99(-5,75) - 92 = 661,25 - 569,25 - 92 = 0$

3. On pose $H = 16 - 25x^2$. Écrire H sous la forme d'un produit de deux facteurs du premier degré. (1,5 point)
$H = 16 - 25x^2 = 4^2 - (5x)^2 = (4 + 5x)(4 - 5x)$

4. En déduire une écriture de G sous forme également d'un produit de facteurs du premier degré. (2 points)
$G = (4 + 5x)\underline{(4 - 5x)} - 3\,\underline{(4 - 5x)}\,(3x + 9)$
$G = \underline{(4 - 5x)}\,(4 + 5x - 3(3x + 9))$
$G = (4 - 5x)\,(4 + 5x - 9x - 27)$
$G = (4 - 5x)\,(-4x - 23)$

5. Résoudre l'équation $G = 0$. (Cette question est facultative - pas encore vu en classe)
Pour que $G = 0$ il faut que $4 - 5x = 0$ ou $-4x - 23 = 0$ et donc que $x = \frac{4}{5} = 0,8$ ou $x = \frac{23}{-4} = -5,75$

Exercice 3 : Brevet Martinique 2008

1. 

2. • BAF est inscrit dans un cercle de diamètre [AB]
   • Si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre l'un de ses côtés alors ce triangle est rectangle.
   • BAF est rectangle en F.

3. • $\cos\left(\widehat{BAF}\right) = \frac{AF}{AB}$ donc $AF = AB \times \cos\left(\widehat{BAF}\right) = 8 \times \cos(60) = 4$
   • $\sin\left(\widehat{BAF}\right) = \frac{BF}{BA}$ donc $BF = BA \times \sin\left(\widehat{BAF}\right) = 8 \times \sin(60) \approx 6,9$

Chapitre 6

Puissances

6.1 Définitions (Rappels)

Définition 16.

Si a est un nombre et n est un entier naturel alors :

$$a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n\ facteurs} \qquad \text{se lit “}a\ puissance\ n\text{” ou “}a\ exposant\ n\text{”}$$

Par définition on posera aussi : $a^1 = a$ et $a^0 = 1$.
Si $a \neq 0$, on a par définition :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times \ldots \times a}_{n\ facteurs}}$$

autrement dit, a^{-n} est l'inverse de a^n puisque $a^n \times a^{-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$.

Exemples :

$3^4 = 81$; $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5 = 3413$; $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$; $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$; $\left(\sqrt{11}\right)^3 = 11\sqrt{11}$

6.2 Cas particulier : les puissances de 10

Cas particulier :

Les puissances de 10 sont faciles à calculer puisque le nombre de zéros dans l'écriture décimal correspond à l'exposant.

Exemples :

$$10^5 = 1\,\underbrace{00\,000}_{5\ zéros} \qquad ; \qquad 10^{-3} = \underbrace{0,00}_{3\ zéros}\,1$$

6.3 Régles et priorités

6.3.1 Régles de calcul

Propriété 14 (Avec le même nombre)**.**

Si a est un nombre et si m et n sont des entiers relatifs (positifs ou négatifs) alors :

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m\times n}$$

Exemples :

$5^3 \times 5^{-9} = 5^{3+(-9)} = 5^{-6}$; $\dfrac{3^{-8}}{3^{-11}} = 3^{-8-(-11)} = 3^3$; $\left(2^3\right)^4 = 2^{3\times 4} = 2^{12}$

Propriété 15 (Avec le même exposant)**.**

Si a et $b \neq 0$ sont des nombres et si n est un entier relatif (positifs ou négatifs) alors :

$$(a\times b)^n = a^n \times b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exemples :

$(7x)^2 = 7^2x^2 = 49x^2$; $\left(3\sqrt{7}\right)^4 = 3^4 \times \left(\sqrt{7}\right)^4 = 81 \times \underbrace{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}_{7} \times \underbrace{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}_{7} = 81 \times 49 = 3969$

$\left(\dfrac{2x}{3}\right)^3 = \dfrac{(2x)^3}{3^3} = \dfrac{2^3x^3}{3^3} = \dfrac{8x^3}{27}$

6.3.2 Priorités

Définition 17.

Dans un calcul qui comporte des parenthèses, des exposants et des opérations, on calcule dans l'ordre :

- L'intérieur des parenthèses si c'est possible.
- Les puissances.
- Les multiplications et divisions (de gauche à droite).
- Les additions et soustractions.

Exemples :

$2 \times 5^3 = 2 \times 125 = 250$; $\left(x+\sqrt{3}\right)^2 = x^2 + 2\times x\times\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$

$5 \times (7+3)^{-4} = 5 \times 10^{-4} = 5 \times 0,0001 = 0,0005$

6.4 Notation scientifique

Définition 18.

L'écriture scientifique d'un nombre est **la seule** écriture de la forme $a \times 10^n$ où n est un entier relatif et a est un nombre décimal avec **un seul chiffre non nul** avant la virgule.

Exemples :

$320\,000$ peut s'écrire : $320 \times 10^3 = 32 \times 10^4 = 3,2 \times 10^5 = 0,32 \times 10^6$,
mais la seule écriture qui ne contient qu'un chiffre non nul avant la virgule est $3,2 \times 10^5$, c'est la notation scientifique du nombre $320\,000$.

$A = 4^5 = 1024 = 1,024 \times 10^3$

$$B = \underbrace{0,000257}\times 10^{12}$$

$$B = 2,57 \times \underbrace{10^{-4} \times 10^{12}}$$

$$B = 2,57 \times 10^8$$

$$C = \frac{7 \times 10^5 \times 4 \times 10^{-11}}{10^{-17} \times 35 \times 10^3 \times 2}$$

$$C = \frac{7 \times 4}{35 \times 2} \times \frac{10^5 \times 10^{-11}}{10^{-17} \times 10^3}$$

$$C = \frac{\cancel{7} \times \cancel{2} \times 2}{5 \times \cancel{7} \times \cancel{2}} \times \frac{10^{5+(-11)}}{10^{-17+3}}$$

$$C = \frac{2}{5} \times \frac{10^{-6}}{10^{-14}}$$

$$C = 0,4 \times 10^{-6-(-14)}$$

$$C = \underbrace{0,4} \times 10^8$$

$$C = 4 \times \underbrace{10^{-1} \times 10^8}$$

$$C = 4 \times 10^7$$

6.5 Fiche d'exercices

Fiche d'exercices sur les puissances

Exercice type 1 :
Écrire sous la forme d'une puissance d'un nombre entier.

$A = 5^7 \times 5^8$ $\quad B = 4^{-2} \times 3^{-2}$ $\quad C = \dfrac{15^3}{15^{-4}}$ $\quad D = \dfrac{35^3}{7^3}$

Exercice type 2 (plusieurs opérations) :
Écrire sous la forme d'une puissance d'un nombre entier.

$E = 3^4 \times 3^5 \times 3^{-12}$ $\quad F = \dfrac{5^3 \times 2^3}{10^{-5}}$ $\quad G = \dfrac{\frac{28^3}{7^3}}{\frac{4^{-7}}{4^{-4}}}$

Exercice type 3 :
Donner la notation scientifique et décimale des nombres suivants.

$H = 4^5$ $\quad I = 391 \times 10^{-8}$ $\quad J = \dfrac{25 \times 10^3 \times 21 \times 10^{-9}}{35 \times 10^2}$

$$K = \frac{10^2 \times 60 \times (4 \times 10^{-2})^3 \times 10^{12}}{15 \times 10^2 \times 4^2}$$

6.6 Corrigé de la fiche d'exercices

Corrigé de la fiche d'exercices sur les puissances

Exercice type 1 :
Écrire sous la forme d'une puissance d'un nombre entier.

$$A = 5^7 \times 5^8 \qquad A = 5^{7+8} \qquad A = \boxed{5^{15}}$$

$$B = 4^{-2} \times 3^{-2} \qquad B = (4 \times 3)^{-2} \qquad B = \boxed{12^{-2}}$$

$$C = \frac{15^3}{15^{-4}} \qquad C = 15^{3-(-4)} \qquad C = \boxed{15^7}$$

$$D = \frac{35^3}{7^3} \qquad D = \left(\frac{35}{7}\right)^3 \qquad D = \boxed{5^3}$$

Exercice type 2 (plusieurs opérations) :
Écrire sous la forme d'une puissance d'un nombre entier.

$$E = 3^4 \times 3^5 \times 3^{-12} \qquad E = 3^{4+5-12} \qquad E = \boxed{3^{-3}}$$

$$F = \frac{5^3 \times 2^3}{10^{-5}} \qquad F = \frac{(5 \times 2)^3}{10^{-5}} \qquad F = \frac{10^3}{10^{-5}} \qquad F = \boxed{10^8}$$

$$G = \frac{\dfrac{28^3}{7^3}}{\dfrac{4^{-7}}{4^{-4}}} \qquad G = \frac{\left(\dfrac{28}{7}\right)^3}{4^{-7-(-4)}} \qquad G = \frac{4^3}{4^{-3}} \qquad G = \boxed{4^6}$$

Exercice type 3 :
Donner la notation scientifique et décimale des nombres suivants.

$$H = 4^5 \qquad H = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \qquad H = 1024 \qquad H = \boxed{1,024 \times 10^3}$$

$$I = \underbrace{391}_{3,91\times10^2} \times 10^{-8} \qquad I = 3,91 \times \underbrace{10^2 \times 10^{-8}} \qquad I = \boxed{3,91 \times 10^{-6}}$$

$$J = \frac{25 \times 10^3 \times 21 \times 10^{-9}}{35 \times 10^2} \qquad J = \frac{25 \times 21}{35} \times \frac{10^3 \times 10^{-9}}{10^2} \qquad J = \frac{\cancel{5} \times 5 \times 3 \times \cancel{7}}{\cancel{7} \times \cancel{5}} \times \frac{10^{-6}}{10^2}$$

$$J = \underbrace{15}_{1,5\times10^1} \times 10^{-8} = \boxed{1,5 \times 10^{-7}}$$

$$K = \frac{10^2 \times 60 \times (4 \times 10^{-2})^3 \times 10^{12}}{15 \times 10^2 \times 4^2} = \frac{10^2 \times 60 \times 4^3 \times (10^{-2})^3 \times 10^{12}}{15 \times 10^2 \times 4^2} = \frac{60 \times 4^3}{15 \times 4^2} \times \frac{\cancel{10^2} \times 10^{-6} \times 10^{12}}{\cancel{10^2}}$$

$$= \frac{\cancel{15} \times 4 \times 4^3}{\cancel{15} \times 4^2} \times 10^{-6+12} = \frac{4^1 \times 4^3}{4^2} \times 10^6 = \frac{4^4}{4^2} \times 10^6 = 4^2 \times 10^6 = \underbrace{16}_{1,6\times10^1} \times 10^6 = \boxed{1,6 \times 10^7}$$

6.7 Contrôle

Contrôle de mathématiques

Celui qui t'enseigne vaut mieux que celui qui te donne (Proverbe kabyle)

Exercice 1 : Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{\frac{3}{4} - \frac{8}{9}}{\frac{5}{6} + \frac{10}{9}}$$

Exercice 2 :

1. Donner le résultat sous la forme d'un puissance d'un nombre entier.

   a) $2^3 \times 2^{-7} \times 2$ b) $2^4 \times 5^4$ c) $\frac{36^{-3}}{9^{-3}}$ d) $\frac{7^4}{7^{-3}}$

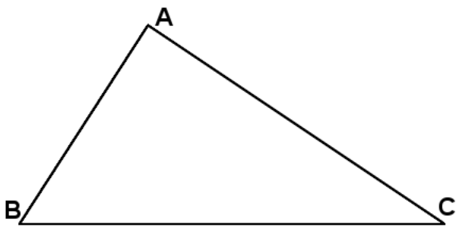
2. Donner la notation scientifique et décimale du nombre suivant.

$$B = \frac{10^7 \times 60 \times (10^4)^{-3} \times 14}{7 \times 10^{-5} \times 4 \times 10^2}$$

Exercice 3 : Calcul littéral.

1. Développer et réduire l'expression $C = 25x^2 - 16 - (7x - 3)(5x + 4)$
2. Factoriser l'expression suivante : $25x^2 - 16$
3. En déduire une expression factorisée de C.

Exercice 4 : Problème.



ABC est un triangle quelconque (la figure est volontairement fausse). On sait que AC = 8cm, AB = 5 cm et $\widehat{ACB} = 30$. *La hauteur issue de A coupe (BC) en un point H.*

1. Expliquer pourquoi ACH et AHB sont des triangles rectangles.
2. Calculer la longueur AH.
3. En déduire un arrondi au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{BAH}$.

Barème : 3/6/6/5

6.8 Corrigé du contrôle

Corrigé du contrôle de mathématiques

Celui qui t'enseigne vaut mieux que celui qui te donne (Proverbe kabyle)

Exercice 1 : Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$$A=\frac{\frac{3}{4}-\frac{8}{9}}{\frac{5}{6}+\frac{10}{9}}=\frac{\frac{3\times 9}{4\times 9}-\frac{8\times 4}{9\times 4}}{\frac{5\times 3}{6\times 3}+\frac{10\times 2}{9\times 2}}=\frac{\frac{27}{36}-\frac{32}{36}}{\frac{15}{18}+\frac{20}{18}}=\frac{\frac{-5}{36}}{\frac{35}{18}}=\frac{-5}{36}\times\frac{18}{35}=-\frac{\cancel{5}\times\cancel{18}}{\cancel{18}\times 2\times\cancel{5}\times 7}=\boxed{\frac{-1}{14}}$$

Exercice 2 :

1. Donner le résultat sous la forme d'un puissance d'un nombre entier.

a) $2^3\times 2^{-7}\times\underbrace{2}_{2^1}=2^{3-7+1}=\boxed{2^{-3}}$ **b)** $2^4\times 5^4=(2\times 5)^4=\boxed{10^4}$

c) $\frac{36^{-3}}{9^{-3}}=\left(\frac{36}{9}\right)^{-3}=\boxed{4^{-3}}$ **d)** $\frac{7^4}{7^{-3}}=7^{4-(-3)}=\boxed{7^7}$

2. Donner la notation scientifique et décimale du nombre suivant.

$$B=\frac{10^7\times 60\times(10^4)^{-3}\times 14}{7\times 10^{-5}\times 4\times 10^2}=\frac{60\times 14}{7\times 4}\times\frac{10^7\times(10^4)^{-3}}{10^{-5}\times 10^2}=\frac{\cancel{4}\times 15\times 2\times\cancel{7}}{\cancel{7}\times\cancel{4}}\times\frac{10^7\times 10^{-12}}{10^{-5}\times 10^2}$$

donc : $B=30\times\frac{10^{-5}}{10^{-3}}=30\times 10^{-5-(-3)}=\underbrace{30\times}_{3\times 10^1}10^{-2}=3\times\underbrace{10^1\times 10^{-2}}_{10^{-1}}=\boxed{3\times 10^{-1}=0,3}$

Exercice 3 : Calcul littéral.

1. Développer et réduire l'expression C

$C=25x^2-16\ -(7x-3)(5x+4)$

$C=25x^2-16\ -(35x^2+28x-15x-12)$

$C=25x^2-16-35x^2-28x+15x+12$

$C=-10x^2-13x-4$

2. Factoriser l'expression suivante : $25x^2-16$

$25x^2-16$

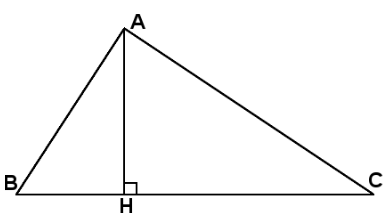
$(5x)^2-4^2$

$(5x+4)(5x-4)$

3. En déduire une expression factorisée de C.

$$\begin{aligned}C=25x^2-16-(7x-3)(5x+4)&=(\underline{5x+4})(5x-4)\ -(7x-3)(\underline{5x+4})\\&=(\underline{5x+4})\,(5x-4-(7x-3))\\&=(5x+4)(5x-4-7x+3)\\&=(5x+4)(-2x-1)\end{aligned}$$

Exercice 4 : Problème.



ABC est un triangle quelconque (la figure est volontairement fausse). On sait que AC = 8cm, AB = 5 cm et $\widehat{ACB}=30$. La hauteur issue de A coupe (BC) en un point H.

1. Expliquer pourquoi ACH et AHB sont des triangles rectangles.

   (AH) est la hauteur issur de A dans le triangle ABC.

   Dans un triangle, la hauteur issue d'un sommet est une droite qui passe par ce sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

   (AH) et (BC) forment un angle droit, ACH et AHB sont donc des triangles rectangles.

2. Calculer la longueur AH.

   Dans le triangle ACH rectangle en H, AC=8cm et $\widehat{ACH}=30$

   $\sin(\widehat{ACH})=\frac{AH}{AC}$ ou encore : $\sin(30)=\frac{AH}{8}$, d'où : $AH=8\times\sin(30)=4$.

3. En déduire un arrondi au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{BAH}$.

   Dans le triangle ACH rectangle en H, AH=4cm et AB=5cm.

   $\cos(\widehat{BAH})=\frac{AH}{AB}$ ou encore : $\cos(\widehat{BAH})=\frac{4}{5}$ donc : $\widehat{BAH}=\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\approx 37$.

Chapitre 7

Probabilités

7.1 Expériences aléatoires

Définition 19.

On dit qu'une expérience est **aléatoire** si elle peut aboutir à plusieurs résultats possibles (qu'on appelle "**issues**") et si l'on ne sait pas quelle issue va se produire quand on réalise l'expérience.

Exemples :

1. Lancer une pièce et regarder si elle présente pile ou face, il y a deux issues possibles : pile et face.
2. Lancer un dé à six faces et lire le résultat, il y a six issues possibles : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
3. Le tirage du loto, il y a énormément d'issues possibles : 19 068 840.

Contre-exemples :

1. Nombre de notes au dessus de 15/20 en mathématiques (la chance n'a rien à voir...).
2. La surface d'une boule quand on connaît son rayon (une formule permet de déterminer directement le volume en fonction du rayon r : $\frac{4}{3}\pi r^3$).

7.2 Évènements et probabilités

Définition 20.

En probabilités, un "**évènement**" est un ensemble de résultats (ou issues) d'une expérience aléatoire.

Remarque : Chaque issue est un évènement.

Exemples : On lance un dé à six faces.

• **Chaque issue** est un évènement, "obtenir 1", "obtenir 2", "obtenir 3", "obtenir 4", "obtenir 5", "obtenir 6" sont des issues et donc aussi des évènements.

• **"Obtenir un nombre pair"** est aussi un évènement car il est constitué des issues : "obtenir 2", "obtenir 4" et "obtenir 6".

Définition 21.

Lors d'une expérience aléatoire, la **probabilité** qu'un évènement se produise est un nombre compris entre 0 et 1 qui représente "les chances" que cet évènement se produise.

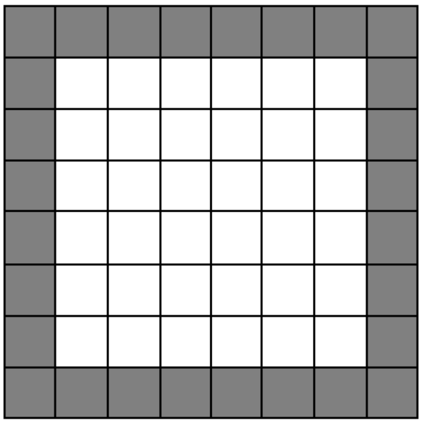
Quand l'expérience aléatoire a un nombre fini d'issues possibles, on peut calculer la probabilité d'un évènement on faisant le quotient du nombre d'issues favorables sur le nombre total d'issues.

Exemples :

• On lance un dé à six faces. La probabilité de l'évènement E : "obtenir un chiffre impair" est donc 0,5. En effet, il y a 3 issues favorables $\{\ 1\,;\ 3\,;\ 5\ \}$ sur 6 issues au total. On écrit $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$.

• On tire une carte au hasard dans un jeux de 32 cartes. La probabilité de l'évènement F : "obtenir un roi" est $P(F) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0,125$.

• On choisit une case au hasard sur un damier de 8 cases sur 8. La probabilité de l'évènement :
G : *"on a choisit une case située au bord"* est $P(G) = \frac{28}{64} = \frac{7}{16} = 0,4375$.



Remarques :

1. Si la probabilité d'un évènement est nulle alors on dit que c'est un évènement **négligeable**.
2. Si la probabilité d'un évènement est égale à 1 alors on dit que c'est un évènement **certain**.

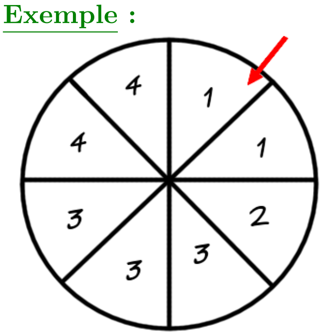
7.3 Arbres des possibles

7.3.1 Avec une épreuve

Définition 22.

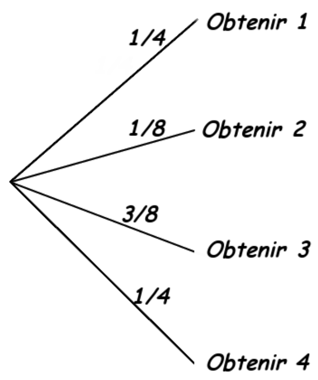
On peut représenter une expérience aléatoire menant à un nombre fini d'issues par un schéma qu'on appelle "**arbre des possibles**".

Exemple :



On fait tourner la roue ci-contre et on regarde le nombre sur lequel elle s'arrête.

Seul quatre issues sont possibles : 1 ; 2 ; 3 ou 4, l'arbre des possibles de cette expérience aléatoire aura donc quatre branches sur lesquelles on peut inscrire la probabilité de chaque issue.



La probabilité d'obtenir "1" est 1/4 car on a 2 chances sur 8 d'obtenir "1" et $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Considèrons l'évènement :
E : *"obtenir un nombre impair"*.

Pour calculer la probabilité de l'évènement E il suffit d'ajouter les probabilités de chaque issues favorables, ici $P(E) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

7.4 Évènements incompatibles et évènements contraires

7.4.1 Évènements incompatibles

Propriété 16.

On dit que deux évènements A et B sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent pas se produire en même temps.
Dans ce cas la probabilité que l'un ou l'autre se produise est égal à la somme des probabilités de chacun d'eux.

Exemple :
On lance un dé à six faces.
Si $A = \{\text{obtenir un nombre impair}\}$ et $B = \{\text{obtenir } 2\}$ alors A et B sont bien incompatibles puisqu'ils ne peuvent pas se produire simultanément.
On a alors $P\left(A \text{ } ou \text{ } B\right) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Attention : cette propriété d'addition devient fausse quand les évènements ne sont pas incompatibles.

7.4.2 Évènements contraires

Propriété 17.

On dit que deux évènements A et B sont contraires lorsque l'un se produit uniquement quand l'autre ne se produit pas. On écrit alors : $\boldsymbol{A = non\ B}$.
Dans ce cas la somme des probabilités de ces évènements est égal à 1. On écrit : $\boldsymbol{P(A)+P(B)=1}$.

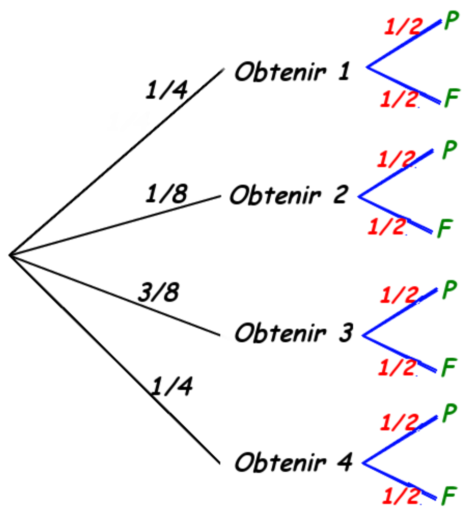
Exemple :
Si on reprend l'exemple du paragraphe 2. (*Évènements et probabilités*), le damier avec $G = \{$*on a choisit une case située au bord*$\}$, l'évènement contraire de G est alors :
$H = \{$*on a choisit une case qui n'est pas au bord*$\}$, on a alors $P(G) + P(H) = 1$ autrement dit : $P(H) = 1 - P(G) = 1 - 0,4375 = 0,5625$.

7.5 Expériences aléatoires à deux épreuves

Propriété 18.

Dans un arbre à plusieurs épreuves, la probabilité d'un évènement est égal au **produit** des probabilités menant à cet évènement.

Exemples :
On fait tourner la roue précédente puis on lance une pièce (non truquée).



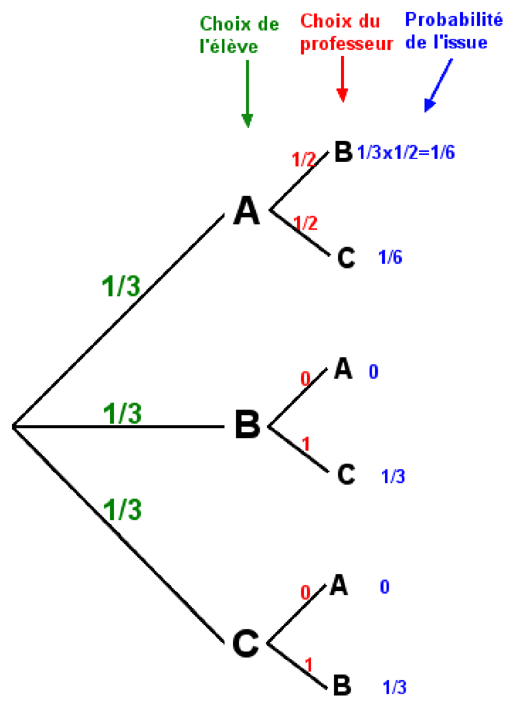
• La probabilité d'obtenir le chiffre *3* et d'avoir *pile* est de :

$$\frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16} = 0,1875.$$

• La probabilité d'obtenir le chiffre *4* et d'avoir *face* est de :

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Le jeu des boîtes :
On dispose de trois boîtes indexées par A, B et C, l'une d'entre elles contient le corrigé du prochain contrôle de mathématiques et les autres sont vides. Un élève choisit une boîte au hasard puis le professeur décide de montrer à cet élève que l'une des deux autres boîtes est vide et il laisse le choix à l'élève de changer ou non de boîte.
L'élève a-t-il intérêt à changer de boîte ?



Pour simplifier un peu le raisonnement on peut supposer que le corrigé se trouve dans la boîte **A** (s'il se trouve dans une autre boîte le raisonnement sera exactement le même).

L'élève ayant choisit la boîte au hasard, la probabilité qu'il choisisse la boîte A est $\frac{1}{3}$ (idem pour les boîtes B et C - en vert sur l'arbre ci-contre).

Ensuite le professeur décide de montrer à l'élève une boîte vide. Si l'élève a auparavant choisit la boîte A alors le professeur peut montrer indifféremment la boîte B ou C puisque de toute manière elles sont toutes les deux vides.
Il y a donc dans ce cas une chance sur deux que le professeur choisisse la boîte B et une chance sur deux qu'il choisisse la boîte C (en rouge sur l'arbre).

Par contre si l'élève a choisit auparavant la boîte B alors le professeur ne peut pas lui montrer la boîte A puisqu'elle contient le corrigé, il va donc lui montrer de manière certaine (probabilité égale à 1) la boîte C.

On a le même raisonnement si l'élève choisit la boîte C.

Au final, l'élève a une probabilité de $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ de trouver le corrigé s'il change de boîte alors qu'elle n'est que de $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ s'il garde la même boîte.

7.6 Fréquences et probabilités

Propriété 19 (Loi des grands nombres).

Plus on répète une expérience un grand nombre de fois plus la fréquence d'un évènement se rapporche de sa probabilité.

Exemples :
• Si on lance un très grand nombre de fois une pièce, la fréquence d'apparition de "face" (nombre de faces divisé par le nombre de lancés) sera proche de 0,5.

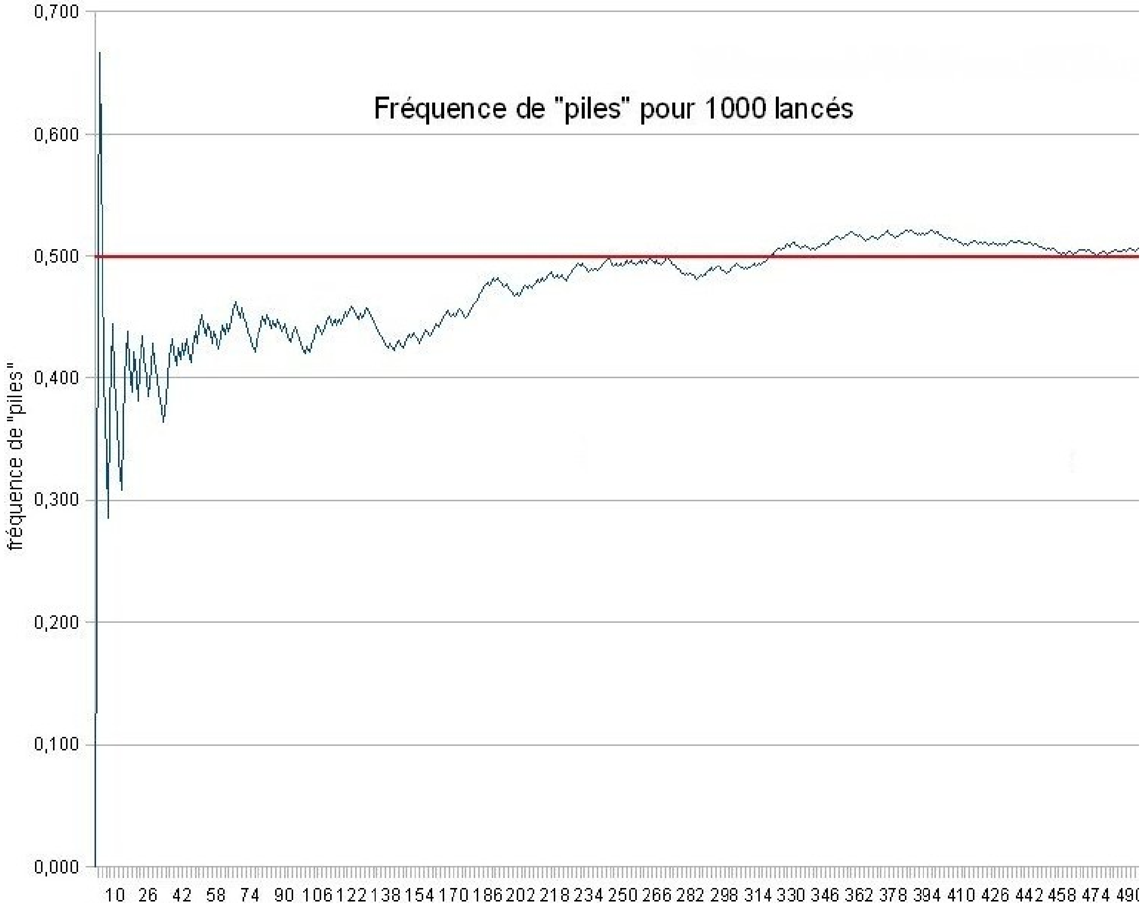
Expérience réalisée en classe :
On a lancé une pièce 50 fois (pour gagner du temps on a partagé le travail en 5 groupes ayant chacun lancé 10 fois une pièce). On a compter le nombre d'apparition de "pile", on obtient le tableau suivant :

	groupe 1	groupe 2	groupe 3	groupe 4	groupe 5
nombre de "pile"	6	5	4	7	4

La fréquence de "pile" pour les 10 premiers lancés est donc : $\frac{6}{10} = 0,6$.
La fréquence de "pile" au bout de 20 lancés est donc : $\frac{6+5}{20} = 0,55$.
La fréquence de "pile" au bout de 30 lancés est donc : $\frac{6+5+4}{30} = 0,50$.
ect... On peut établir le tableau suivant :

nombre de "pile"	6	11	15	22	26
nombre de lancés	10	20	30	40	50
fréquence	0,6	0,55	0,5	0,55	0,52

La fréquence de "pile" finira toujours pas se rapprocher de la probabilité d'avoir "pile" c'est à dire $\frac{1}{2}$.
On a simulé avec le tableur 1000 lancés de pièces et calculer au fur et à mesure la fréquence de "pile". On a reporté sur l'axe des ordonnées la fréquence et sur l'axe des abscisses le nombre de lancés, voici la représentation graphique pour les 500 premiers lancés. On voit la fréquence se rapporcher de la probabilité 0,5.



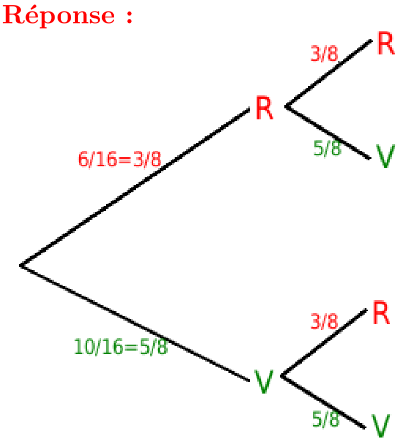
• Si on lance un très grand nombre de fois un dé, la fréquence d'apparition de "six" (nombre de d'apparitions de six divisé par le nombre de lancés) sera proche de $\frac{1}{6}$.

7.7 Exercices : avec et sans remise

Exercice (avec remise) :
Un sac contient 6 boules rouges et 10 boules vertes indiscernables. On tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans le sac et on recommence, on tire à nouveau une boule dans le sac et on note sa couleur.

1. Dessiner l'arbre des possibles de cette expérience aléatoire à deux épreuves.
2. Calculer la probabilité de chaque tirage.
3. Calculer la probabilité de l'évènement E :“on tire deux boules de couleurs différentes”
4. Expliquer par une phrase l'évènement *non E* et donner sa probabilité.

Réponse :



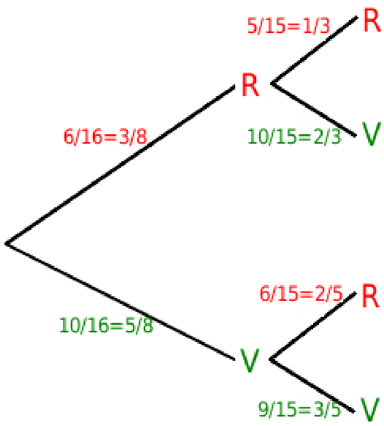
Il y a 6 boules rouges sur 16 boules au total, la probabilité de tirer une boule rouge est donc $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$. De même la probabilité de tirer une boule verte est de $\frac{5}{8}$. Lors du second tirage, puisque l'on a remis la première boule tirée les probabilités sont exactement les mêmes.

L'évènement E se réalise si on tire d'abord *rouge* puis *vert* ou alors d'abord *vert* puis *rouge*, dans le premier cas la probabilité est $\frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$ dans le second cas la probabilité est la même $\frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$. Ces deux évènements (“rouge puis vert” et “vert puis rouge”) étant incompatibles, la probabilité de E s'obtient en ajoutant les probabilités $\frac{15}{64} + \frac{15}{64} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$.

non E signifie le contraire de E, c'est à dire “tirer deux boules de même couleur”. Pour calculer la probabilité de *non E*, on se sert de la dernière propriété : $P(non\ E) = 1 - P(E) = 1 - \frac{15}{32} = \frac{17}{32}$

Exercice (sans remise) :
Même exercice que le précédent mais on ne remet pas la première boule tirée dans le sac.
Il faut faire très attention car dans ce cas là, il n'y a plus 16 boules au second tirage mais 15 car on a enlevé la première boule tirée.

Réponse :



Au premier tirage, rien ne change.

Au second tirage,

si on a auparavant tiré la boule rouge alors il reste 5 boules rouges sur 15 au total, la probabilité de tirer à nouveau une boule rouge est donc de $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. De même, il y a 10 boules vertes sur 15 au total, la probabilité de tirer une boule verte est alors de $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

si on a auparavant tiré la boule verte alors il reste 9 boules vertes sur 15 au total, la probabilité de tirer à nouveau une boule verte est donc de $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$. De même, il y a 6 boules rouges sur 15 au total, la probabilité de tirer une boule rouge est alors de $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

Dans ces conditions, on a alors : $P(E) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{3} \quad + \quad \frac{5}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
On a donc une chance sur deux de tirer deux boules de couleurs différentes et donc aussi une chance sur deux de tirer deux boules de même couleur.

7.8 Fiche d'exercices de probabilités

Exercice 1 : Le dé à 12 faces

On dispose d'un dé non truqué à 12 faces numérotées de 1 à 12. On note le numéro sur lequel tombe le dé.

1. Cette expérience est-elle aléatoire ?
2. Quelle est la probabilité des évènement suivant ?
   E : "Obtenir un nombre pair"
   F : "Obtenir un multiple de 4"
   G : "Ne pas obtenir un multiple de 3"
3. Expliciter ce que signifie *non* E et dire quelles sont les issues qui correspondent à *non* E.
4. Si on lance ce dé un très grand nombre de fois, quelle sera à peu près la fréquence de l'évènement "on obtient un multiple de 5" ?

Exercice 2 : Les cartes

On dispose des 10 cartes suivantes :
dix de coeur; sept de coeur; as de carreau; valet de coeur; dame de trèfle; as de trèfle; roi de carreau; dame de carreau; sept de pique; valet de pique.
On tire une carte au hasard. Quelle est la probabilité de :

a) Tirer l'as de trèfle. **b)** Tirer un as.
c) Tirer une carte rouge. **d)** Tirer une dame.

Exercice 3 : Le sac et les boules

On dispose de cinq boules vertes numérotées 1 ;2 ;3 ;4 ;5, trois boules rouges numérotées 1 ;2 ;3, et deux boules blanches numérotées 1 ;2.
On tire une boule au hasard, calculer la probabilité de :

a) Tirer une boule rouge. **b)** Ne pas obtenir une boule verte.
c) Obtenir une boule rouge ou verte. **d)** Obtenir un numéro pair.

Exercice 4 : Faire un arbre et l'utiliser

On dispose de 4 brins de paille qui mesurent 2cm, 5cm, 6cm et 9cm. Chaque brin a autant de chance que les autres d'être tiré. On tire au hasard un premier brin puis, sans remettre ce brin, on en tire un deuxième. On met bout à bout les deux brins et on mesure la longueur obtenue.

1. Faire un arbre représentant l'expérience et donner toutes les longueurs possibles.
2. Calculer la probabilité d'obtenir une longueur de 11 cm.
3. Calculer la probabilité de ne pas obtenir une longueur de 15 cm.

7.9 Corrigé de la fiche d'exercices de probabilités

<u>Exercice 1</u> : Le dé à 12 faces

1. Oui car le dé n'est pas truqué, chaque numéro a donc autant de chance de sortir que les autres (on dit qu'ils sont équiprobables)
2. La probabilité d'obtenir un nombre pair est de $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ car il y a 6 numéros pairs sur 12 numéros au total.
   La probabilité d'obtenir un multiple de 4 est de $\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25$ car il y a trois multiples de 4 (4 ;8 ;12).
   La probabilité de ne pas obtenir un multiple de 3 est : $1 - P(nonG)$ or *non* G est l'évènement "<u>obtenir</u> un multiple de 3" et sa probabilité est $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (car les multiples de 3 sont 3 ;6 ;9 ;12).
   Donc $P(G) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
3. *non* E est l'évènement contraire de E, *non* E est donc l'évènement "obtenir un numéro impair", il y a 6 issues possibles : 1 ;3 ;5 ;7 ;9 ;11.
4. D'après le cours, si on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'une issue sera proche de sa probabilité. La fréquence de l'évènement "on obtient un multiple de 5" sera donc proche de la probabilité d'obtenir un multiple de 5 c'est à dire : $\frac{2}{12} = \frac{1}{6} \approx 0,16$ car il n'y a que deux multiples de cinq : 5 ;10.

<u>Exercice 2</u> : Les cartes

a) $\frac{1}{10} = 0,1$ car il n'y a qu'un seul as de trèfle sur 10 cartes au total.

b) $\frac{2}{10} = 0,2$ car il y a deux as sur 10 cartes au total.

c) $\frac{6}{10} = 0,6$ car il y a six cartes rouges (3 coeurs et 3 carreaux) sur 10 cartes au total.

d) $\frac{2}{10} = 0,2$ car il y a deux dames sur 10 cartes au total.

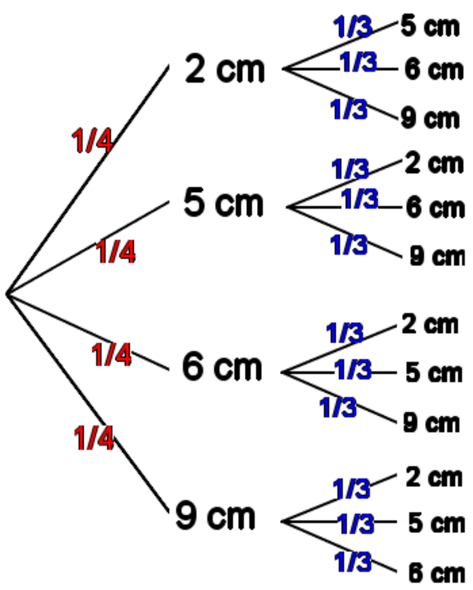
<u>Exercice 3</u> : Le sac et les boules

a) $\frac{3}{10} = 0,3$ car trois boules rouges sur 10 au total. **b)** $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ car cinq boules vertes sur 10 au total.

c) "Obtenir rouge" et "Obtenir vert" sont deux évènements incompatibles, on peut donc ajouter les probabilités $\frac{3}{10} + \frac{5}{10} = 0,8$.

d) $\frac{4}{10} = 0,4$ car il y a quatre numéros pairs (2-vert ; 4-vert ; 2-rouge et 2-blanc) sur 10 au total.

<u>Exercice 4</u> : Faire un arbre et l'utiliser



Longueur total	probabilités
2+5=7 (cm)	1/4 x 1/3 = 1/12
8 cm	1/12
11 cm	1/12
7 cm	1/12
11 cm	1/12
14 cm	1/12
8 cm	1/12
11 cm	1/12
15 cm	1/12
11 cm	1/12
14 cm	1/12
15 cm	1/12

1.

2. Il y a 4 issues favorables à 11 cm sur 12 issues au total, la probabilité est donc de $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

3. De même la probabilité d'obtenir 15 cm est de $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, donc la probabilité de l'évènement contraire (ne pas obtenir 15 cm) est : $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

7.10 Devoir maison

Devoir de mathématiques

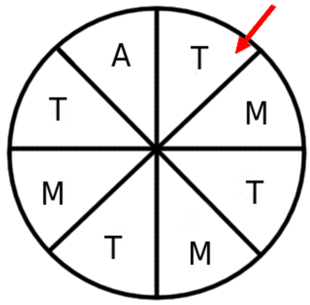
Un voyage de mille lieues commence toujours par un premier pas.
(Lao Tseu)

Exercice 1 : Polynésie française juin 2009

À un stand du *Heiva**, on fait tourner la roue ci-contre. On admet que chaque secteur à autant de chance d'être désigné. On regarde la lettre désignée par la flèche : A, T ou M, et on considère les évènements suivants :

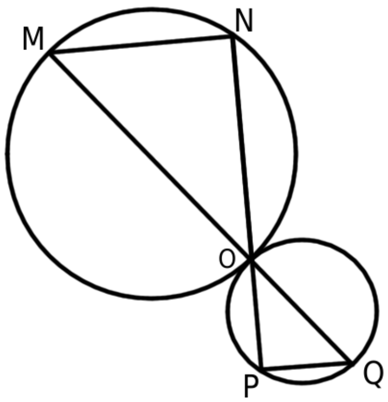
- A : "on gagne un autocollant" ;
- T : "on gagne un tee-shirt" ;
- M : "on gagne un tour de manège" ;

1. Quelle est la probabilité de l'évènement A ?
2. Quelle est la probabilité de l'évènement T ?
3. Quelle est la probabilité de l'évènement M ?
4. Exprimer à l'aide d'une phrase ce qu'est l'évènement "non A", puis donner sa probabilité.



* manifestation annuelle traditionnelle qui a lieu au mois de juillet en Polynésie française.

Exercice 2 : Amérique du Sud novembre 2008 (modifié par mes soins)



La figure n'est pas en vraie grandeur. Les points M, O et Q sont alignés ainsi que les points N, O et P. Les segments [OM] et [OQ] sont des diamètres des deux cercles tracés ; on donne : NM=7,5 cm et PQ=4,5cm.

1. Prouver que les triangles MNO et QPO sont rectangles respectivement en N et P.
2. Justifier que les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.
3. Dans le cas où ON=5cm, calculer la distance OP.
4. Dans le cas où l'aire du disque de diamètre [OM] vaudrait $5cm^2$, calculer l'aire du disque de diamètre [OQ].

Exercice 3 : Sujet complémentaire

Le joueur vedette d'une équipe de basket-ball a participé à 16 matchs consécutifs. Voici la série donnant le nombre de points marqués par ce joueur au cours des 16 rencontres.
21 – 8 – 32 – 17 – 25 – 20 – 19 – 31 – 32 – 9 – 16 – 20 – 25 – 28 – 23 – 42

1. Quelle est l'étendue de cette série ?
2. Calculer la moyenne de cette série.
3. Déterminer la médiane, le premier quartile et le troisième quartile de cette série.

Barème : 6,5 / 7,5 / 6

7.11 Corrigé du devoir maison

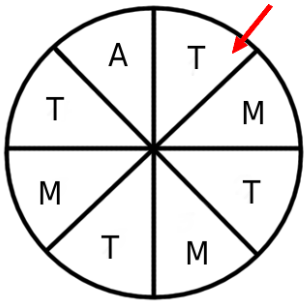
Corrigé du devoir de mathématiques

Un voyage de mille lieues commence toujours par un premier pas.
(Lao Tseu)

Exercice 1 : Polynésie française juin 2009

À un stand du *Heiva**, on fait tourner la roue ci-contre. On admet que chaque secteur à autant de chance d'être désigné. On regarde la lettre désignée par la flèche : A, T ou M, et on considère les évènements suivants :

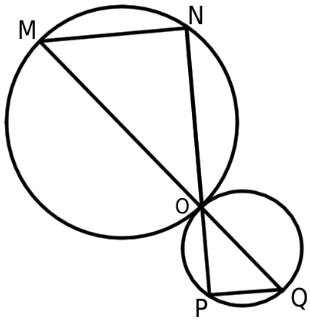
- A : "on gagne un autocollant" ;
- T : "on gagne un tee-shirt" ;
- M : "on gagne un tour de manège" ;



1. **Quelle est la probabilité de l'évènement A ?**
   Il y a un secteur favorable à cet évènement sur 8 au total, la probabilité de A est donc : $\frac{1}{8}$.
2. **Quelle est la probabilité de l'évènement T ?**
   Il y a quatre secteurs favorable à cet évènement sur 8 au total, la probabilité de T est donc : $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
3. **Quelle est la probabilité de l'évènement M ?**
   Il y a trois secteurs favorable à cet évènement sur 8 au total, la probabilité de M est donc : $\frac{3}{8}$.
4. **Exprimer à l'aide d'une phrase ce qu'est l'évènement "non A", puis donner sa probabilité.** L'évènement non A est l'évènement contraire de A, dans ce jeu, cela veut dire que l'on gagne un tee-shirt ou un tour de manège. La probabilité de non A est donc : $\frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

* manifestation annuelle traditionnelle qui a lieu au mois de juillet en Polynésie française.

Exercice 2 : Amérique du Sud novembre 2008 (modifié par mes soins)



La figure n'est pas en vraie grandeur. Les points M, O et Q sont alignés ainsi que les points N, O et P. Les segments [OM] et [OQ] sont des diamètres des deux cercles tracés ; on donne : NM=7,5 cm et PQ=4,5cm.

1. **Prouver que les triangles MNO et QPO sont rectangles respectivement en N et P.**
   On sait que les triangles MNO et QPO sont inscrits respectivement dans les cercles de diamètres [OM] et [OQ].
   Si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre l'un de ses côtés alors ce triangle est rectangle et son hypoténuse est le diamètre du cercle.
   MNO et QPO sont donc rectangles respectivement en N et P et donc que $(MN)\perp(NP)$ et $(NP)\perp(PQ)$.
2. **Justifier que les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.**
   On sait que $(MN)\perp(NP)$ et $(NP)\perp(PQ)$.
   Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles.
   Donc (MN)//(PQ).
3. **Dans le cas où ON=5cm, calculer la distance OP.**
   On sait que les points N,O,P d'une part et M,O,Q d'autre part sont alignés et de plus les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.
   D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité suivante : $\boxed{\frac{ON}{OP}} = \frac{OM}{OQ} = \boxed{\frac{MN}{PQ}}$, d'où :
   $\frac{5}{OP} = \frac{7{,}5}{4{,}5}$ en faisant un produit en croix, on obtient : $OP = \frac{5\times 4{,}5}{7{,}5} = \boxed{3}$
4. **Dans le cas où l'aire du disque de diamètre [OM] vaudrait $5cm^2$, calculer l'aire du disque de diamètre [OQ].**
   Le disque de diamètre [OQ] est une réduction du disque de diamètre [OM], le rapport de réduction est de $\frac{PQ}{NM} = \frac{4{,}5}{7{,}5} = \boxed{0,6}$. D'après le cours, l'aire du disque de diamètre [OQ] s'obtient donc en multipliant l'aire du disque de diamètre [OM] par $0,6^2 = 0,36$.
   L'aire du disque de diamètre [OQ] est donc de : $5 \times 0,36 = \boxed{1,8\,cm^2}$

Exercice 3 : Sujet complémentaire

Le joueur vedette d'une équipe de basket-ball a participé à 16 matchs consécutifs. Voici la série donnant le nombre de points marqués par ce joueur au cours des 16 rencontres.
21 – 8 – 32 – 17 – 25 – 20 – 19 – 31 – 32 – 9 – 16 – 20 – 25 – 28 – 23 – 42

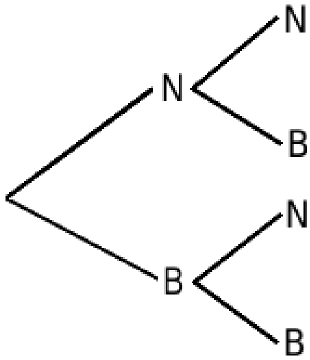
1. **Quelle est l'étendue de cette série ?**
   L'étendue de cette série est : $42 - 8 = \boxed{34}$
2. **Calculer la moyenne de cette série.**
   La moyenne est : $\dfrac{21+8+32+17+25+20+19+31+32+9+16+20+25+28+23+42}{16} = \boxed{23}$
3. **Déterminer la médiane, le premier quartile et le troisième quartile de cette série.**
   Il faut ranger les valeurs de cette série par ordre croissant : 8 – 9 – 16 – 17 – 19 – 20 – 20 – 21 – 23 – 25 – 25 – 28 – 31 – 32 – 32 – 42
   • $\frac{16}{2} = 8$, la médiane est donc un nombre compris entre la $8^{ème}$ et la $9^{ème}$ valeur de cette série : par exemple $\boxed{22}$.
   • $\frac{16}{4} = 4$, le premier quartile est donc la $4^{ème}$ valeur de cette série : $\boxed{17}$.
   • $\frac{3}{4} \times 16 = 12$, le troisième quartile est donc la $12^{ème}$ valeur de cette série : $\boxed{28}$.

7.12 Contrôle

Contrôle de mathématiques

Si tu donnes un poisson à un homme, il mangera un jour.
Si tu lui apprends à pêcher, il mangera toujours.(Lao Tseu)

Exercice 1 :
Un sac contient trois billes noires et deux billes blanches. On tire au hasard une bille et on note sa couleur (N pour noire et B pour blanche) puis on remet la bille dans le sac et on tire à nouveau une bille au hasard et on note encore sa couleur.

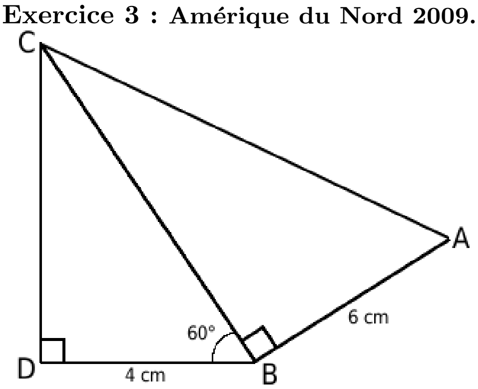


1. Indiquer sur l'arbre des possibles la probabilité de chaque branche.
2. On considère l'évènement E : “on tire une bille blanche puis une bille noire” et l'évènement F : “on tire une bille noire puis une bille blanche”. Calculer les probabilités de E et F.
3. Si on considère l'évènement G : “on tire deux billes de même couleur”, expliquer très clairement ce que signifie *non G* et donner sa probabilité.

Exercice 2 : Q.C.M. Pour chaque question écrire la bonne réponse sur la copie.
On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Questions	réponse 1	réponse 2	réponse 3
La probabilité de tirer un coeur est	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$
La probabilité de tirer un 9 est	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$
La probabilité de tirer trèfle ou pique	0,5	$\frac{1}{16}$	0,25
La probabilité de tirer une figure	$\frac{1}{4}$	0,375	1

Exercice 3 : Amérique du Nord 2009.



1. Montrer que BC = 8 cm.
2. Calculer CD. Donner une valeur arrondie au dixième.
3. Calculer AC.
4. Quelle est la valeur de $\tan \widehat{BAC}$?
5. En déduire la valeur arrondie au degré de $\widehat{BAC}$.

Exercice 4 : Amérique du Nord 2007.
On considère l'expression $E = (3x+2)^2 - (3x+2)(x+7)$.
1. Développer et réduire E.
2. Factoriser E.
3. Calculer E lorsque $x = 0$, lorsque $x = \frac{-2}{3}$.

Barème : 6/2/6,5/5,5

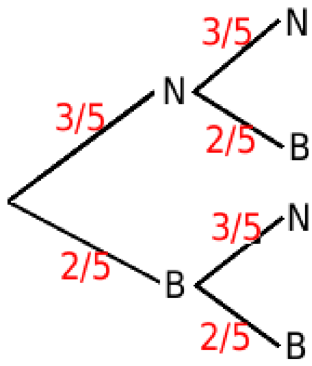
7.13 Corrigé du contrôle

Corrigé du contrôle de mathématiques

Si tu donnes un poisson à un homme, il mangera un jour.
Si tu lui apprends à pêcher, il mangera toujours.(Lao Tseu)

Exercice 1 :
Un sac contient trois billes noires et deux billes blanches. On tire au hasard une bille et on note sa couleur (N pour noire et B pour blanche) puis on remet la bille dans le sac et on tire à nouveau une bille au hasard et on note encore sa couleur.

1. **Indiquer sur l'arbre des possibles la probabilité de chaque branche.**
   Il y a 3 billes noires sur 5 billes au total, la probabilité d'obtenir une bille noire est donc 3/5.
   Il y a 2 billes blanches sur 5 billes au total, la probabilité d'obtenir une bille blanche est donc 2/5.

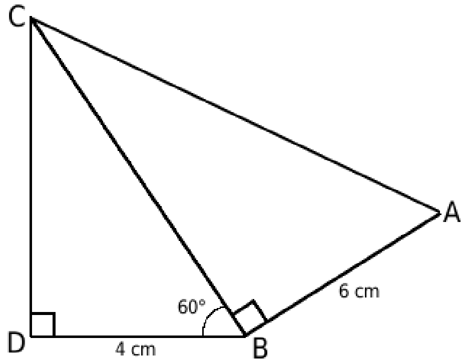


2. **On considère l'évènement E : "on tire une bille blanche puis une bille noire" et l'évènement F : "on tire une bille noire puis une bille blanche". Calculer les probabilités de E et F.**
   Pour calculer la probabilité de E, il faut multiplier les probabilités rencontrées dans l'arbre en passant par B puis N, la probabilité de E est donc : $\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$
   De même, la probabilité de F est : $\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$
3. **Si on considère l'évènement G : "on tire deux billes de même couleur", expliquer très clairement ce que signifie *non G* et donner sa probabilité.**
   L'évènement *non G* est l'évènement contraire de G autrement dit c'est l'évènement qui consiste à "tirer deux billes de couleurs différentes", ou encore avoir {B puis N} ou {N puis B}, c'est à dire E ou F ! Ces deux évènement (E et F) sont incompatibles, la probabilité d'avoir l'un ou l'autre est donc la somme des probabilités de E et F : $\frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$.

Exercice 2 : Q.C.M. Pour chaque question écrire la bonne réponse sur la copie.
On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Questions	réponse 1	réponse 2	réponse 3	justification
La probabilité de tirer un coeur est	$\frac{1}{4}$			car il y a 8 coeurs sur 32 cartes : $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$
La probabilité de tirer un 9 est			$\frac{1}{8}$	car il y a 4 neuf sur 32 cartes : $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$
La probabilité de tirer trèfle ou pique	0,5			car cela représente la moitié du jeu de carte
La probabilité de tirer une figure		0,375		car il y a 12 figures : $\frac{12}{32} = 0,375$

Exercice 3 : Amérique du Nord 2009.



1. **Montrer que BC = 8 cm.**
   BCD est rectangle en D. $\cos\widehat{CBD} = \frac{BD}{BC}$ donc $\cos(60) = \frac{4}{BC}$ et $BC = \frac{4}{\cos(60)} = 8$.

2. **Calculer CD. Donner une valeur arrondie au dixième.** (on peut au choix utiliser <u>sinus</u>, tangente ou Pythagore)
   BCD est rectangle en D. $\sin\widehat{CBD} = \frac{DC}{BC}$ donc $\sin(60) = \frac{DC}{8}$ et $DC = 8 \times \sin(60) \approx 6,9$.

3. **Calculer AC.**
   ABC est un triangle rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité suivante : $AC^2 = BA^2 + BC^2$ soit en remplaçant : $AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$, donc $AC = 10$.

4. **Quelle est la valeur de $\tan\widehat{BAC}$?**
   ABC est rectangle en B. $\tan\widehat{BAC} = \frac{BC}{BA} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1,\bar{3}$.

5. **En déduire la valeur arrondie au degré de $\widehat{BAC}$.**
   On en déduit donc que $\widehat{BAC} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53$

Exercice 4 : Amérique du Nord 2007.
On considère l'expression $E = (3x+2)^2 - (3x+2)(x+7)$.

1. Développer et réduire E.

$E = (3x+2)^2 - (3x+2)(x+7)$
$E = 9x^2 + 12x + 4 - (3x^2 + 21x + 2x + 14)$
$E = 9x^2 + 12x + 4 - 3x^2 - 21x - 2x - 14$
$E = 6x^2 - 11x - 10 \qquad (*)$

2. Factoriser E.

$E = \underline{(3x+2)}(3x+2) - \underline{(3x+2)}(x+7)$
$E = \underline{(3x+2)}[3x+2-(x+7)]$
$E = (3x+2)(3x+2-x-7)$
$E = (3x+2)(2x-5) \qquad (**)$

3. Calculer E lorsque $x = 0$, lorsque $x = \frac{-2}{3}$.
En remplaçant x par 0 dans $(*)$ on obtient directement $E = -10$
En remplaçant x par $\frac{-2}{3}$ dans $(**)$ on obtient directement $E = 0$

Chapitre 8

Racines carrées

8.1 Définition

Définition 23.

Si a est un nombre **positif**, on appelle $\sqrt{a}$ (“racine carrée de a”) le nombre positif dont le carré vaut a.

Exemples :

$\sqrt{225} = 15$ car $15^2 = 225$; $\sqrt{0,64} = 0,8$ car $0,8^2 = 0,64$

$\sqrt{\dfrac{9}{16}} = \dfrac{3}{4}$ car $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$; $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel $\sqrt{2} \approx 1,41$

Remarques :

On écrira jamais la racine carrée d’un nombre négatif car cela est impossible
En effet si nous écrivons par exemple $\sqrt{-2}$ cela voudrait dire d’après la définition qu’il existe un nombre dont le carré est négatif or un nombre au carré est toujours positif.

On peut supprimer le signe $\times$ devant $\sqrt{\ }$ par exemple : $2\sqrt{3}$ **signifie** $2 \times \sqrt{3}$

8.2 Propriétés

Propriété 20.

Si a est un nombre positif alors $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Exemples :

$\left(\sqrt{123}\right)^2 = 123$; **Si** $x \geqslant 0$: $(\sqrt{x}+3)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 2\sqrt{x} \times 3 + 3^2 = x + 6\sqrt{x} + 9$

$(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2) = (\sqrt{3})^2 - 2^2 = 3 - 4 = -1$ (**identité remarquable**)

Propriété 21.

Si a est un nombre positif alors $\sqrt{a^2} = a$.

Exemples :

$\sqrt{3,5^2} = 3,5$; $\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{3}{7}$

Propriété 22.

Si a est un nombre négatif alors $\sqrt{a^2} = -a$ (**Attention, a est négatif donc $-a$ est positif !**)

Exemple :
$\sqrt{(-3)^2} = 3$ car $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$, donc comme au dessus, on a bien : $\sqrt{(-3)^2} = -(-3) = 3$

Exercices classiques (plus difficiles)

Écrire sous la forme $a + b\sqrt{c}$ (*Autrement dit : développer et réduire en gardant la valeur exacte*).

$A = (2\sqrt{3} + 5)^2$

$A = (\underbrace{2\sqrt{3}}_{a} + \underbrace{5}_{b})^2$ (*c'est la $1^{\text{ère}}$ identité remarquable*)

$A = \underbrace{(2\sqrt{3})^2}_{a^2} + \underbrace{2 \times 2\sqrt{3} \times 5}_{2\times a\times b} + \underbrace{5^2}_{b^2}$

$A = 2^2(\sqrt{3})^2 + 20\sqrt{3} + 25$

$A = 12 + 20\sqrt{3} + 25$

$A = 37 + 20\sqrt{3}$

$B = (7 + 2\sqrt{5})(7 - 2\sqrt{5})$

$B = (\underbrace{7}_{a} + \underbrace{2\sqrt{5}}_{b})(\underbrace{7}_{a} - \underbrace{2\sqrt{5}}_{b})$ (*c'est la $3^{\text{ème}}$ identité remarquable*)

$B = \underbrace{7^2}_{a^2} - \underbrace{(2\sqrt{5})^2}_{b^2}$

$B = 49 - 2^2(\sqrt{5})^2$

$B = 49 - 4 \times 5$

$B = 49 - 20 = 29$

8.3 Équations du type $x^2 = a$

Propriété 23.

Si a est négatif alors l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution réel.

Exemple : Il n'existe pas de nombre réel x qui vérifie l'équation $x^2 = -1$, car quelque soit le signe du nombre x, x^2 est toujours positif.

Propriété 24.

Si a est nul alors l'équation $x^2 = a$ possède une unique solution : 0.

Exemple : 0 est l'unique solution de l'équation $x^2 = 0$.

Propriété 25.

Si a est positif alors l'équation $x^2 = a$ possède deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemples :

- L'équation $x^2 = 16$ possède exactement deux solutions : $\sqrt{16} = 4$ et $-\sqrt{16} = -4$.
- L'équation $3x^2 + 5 = 7$ possède exactement deux solutions car elle est équivalente à l'équation $3x^2 = 7 - 5$ elle même équivalente à l'équation $x^2 = \dfrac{2}{3}$ qui a pour solutions : $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ et $-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
- L'équation $x^2 = \sqrt{9}$ a pour solutions : $\sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3}$ et $-\sqrt{\sqrt{9}} = -\sqrt{3}$.

8.4 Opérations et racines carrées

8.4.1 Racines carrées et produit

Propriété 26.

La racine carrée du produit de deux nombres positifs est égal au produit des racines carrées de ces nombres.
Autrement dit, si a et b sont positifs alors : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

Exemples :

$\sqrt{3969} = \sqrt{49 \times 81} = \sqrt{49} \times \sqrt{81} = 7 \times 9 = 63$

$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$\sqrt{32} \times \sqrt{2} = \sqrt{32 \times 2} = \sqrt{64} = 8$

8.4.2 Racines carrées et quotient

Propriété 27.

La racine carrée du quotient de deux nombres positifs est égal au quotient des racines carrées de ces nombres.
Autrement dit, si a et b sont positifs alors : $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemples :

$\sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \dfrac{4}{3}$; $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}} = \sqrt{\dfrac{27}{48}} = \sqrt{\dfrac{\cancel{3} \times 9}{\cancel{3} \times 16}} = \sqrt{\dfrac{9}{16}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \dfrac{3}{4}$

Remarque : Attention ! Ces propriétés ne fonctionnent pas avec l'addition et la soustraction !
Contre-exemple : $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

Deux derniers exemples (plus complexes) :

$A = \sqrt{20}\left(\sqrt{5} + \dfrac{1}{\sqrt{45}}\right)$ **(on distribue)**

$A = \sqrt{20} \times \sqrt{5} + \dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}}$

$A = \sqrt{20 \times 5} + \sqrt{\dfrac{20}{45}}$

$A = \sqrt{100} + \sqrt{\dfrac{\cancel{5} \times 4}{\cancel{5} \times 9}}$

$A = 10 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{32}{3}$

(double distribution)

$B = (5\sqrt{2} - \sqrt{3})(4\sqrt{2} + \sqrt{3})$

$B = 5\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} \ + \ 5\sqrt{2}\sqrt{3} \ - \ \sqrt{3} \times 4\sqrt{2} \ - \ \sqrt{3}\sqrt{3}$

$B = 20 \times (\sqrt{2})^2 \ + \ 5\sqrt{2 \times 3} \ - \ 4\sqrt{3 \times 2} \ - \ (\sqrt{3})^2$

$B = 20 \times 2 + 5\sqrt{6} - 4\sqrt{6} - 3$

$B = 40 - 3 + 5\sqrt{6} - 4\sqrt{6}$

$B = 37 + \sqrt{6}$

Exercices classiques

On demande très souvent dans des énoncés d'exercices d'écrire une racine carrée $\sqrt{a}$ sous la forme $b\sqrt{c}$ où c est le plus petit entier possible. Pour cela il faut écrire a comme un produit dont l'un des facteurs est un le plus grand carré possible. (Rappel, les carrés sont : 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 ; 121 ; 144 ; 225 ; ...)

Écrire sous la forme $b\sqrt{c}$ où c est le plus petit entier possible.

a) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3}$ (4 est un carré)
$= \sqrt{4} \times \sqrt{3}$
$= 2\sqrt{3}$

b)
$5\sqrt{7} + \sqrt{28} - 4\sqrt{63}$
$5\sqrt{7} + \sqrt{4 \times 7} - 4\sqrt{9 \times 7}$
$5\sqrt{7} + \sqrt{4} \times \sqrt{7} - 4\sqrt{9} \times \sqrt{7}$
$5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 12\sqrt{7} = -5\sqrt{7}$

c) $\sqrt{32}$ deux "possibilités" :
$\sqrt{32} = \sqrt{4 \times 8}$ ou $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2}$

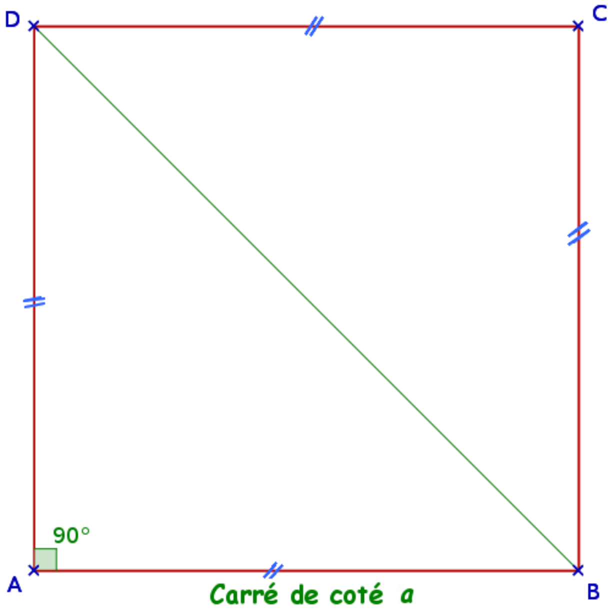
4 et 16 sont tous les deux des carrés mais nous allons choisir l'expression avec le plus grand carré ainsi, le nombre sous la racine carrée sera le plus petit possible.

$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

(dans l'autre cas nous aurions eu : $\sqrt{32} = \sqrt{4 \times 8} = \sqrt{4} \times \sqrt{8} = 2\sqrt{8}$).

8.5 Exemples d'utilisations

8.5.1 Longueur de la diagonale d'un carré de côté a



On montre très facilement que la valeur exacte de la diagonale d'un carré de côté a vaut $a\sqrt{2}$. En effet,

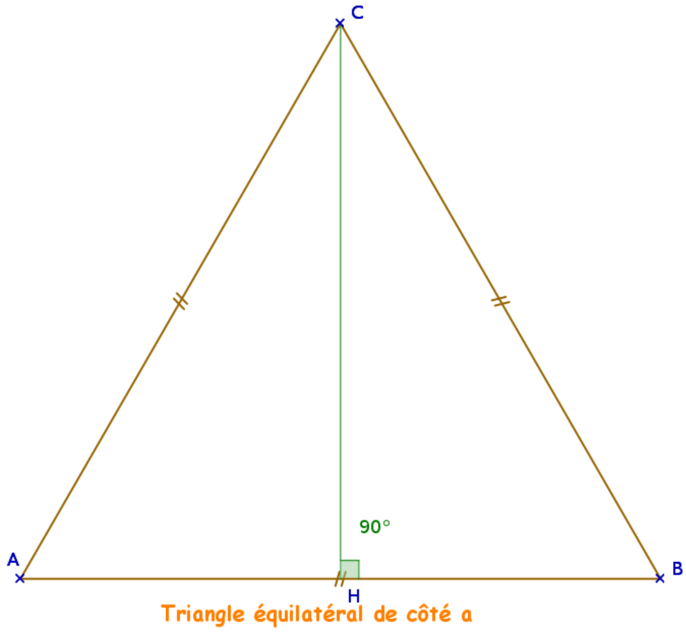
On sait que ABD est un triangle rectangle en A et $AB = AD = a$.
D'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité :

$BD^2 = AB^2 + AD^2$
$BD^2 = a^2 + a^2$
$BD^2 = 2a^2$

Donc $BD = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{a^2} = \boxed{a\sqrt{2}}$

Par exemple la diagonale d'un carré de côté 1 est $\sqrt{2}$, celle d'un carré de côté 7 vaut $7\sqrt{2}$.

8.5.2 Longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a



On montre très facilement que la valeur exacte de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a vaut $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. En effet,

On sait que ACH est un triangle rectangle en H et $AC = a$ et $AH = \frac{a}{2}$.
D'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité :

$AC^2 = HA^2 + HC^2$

$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + HC^2$

$HC^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

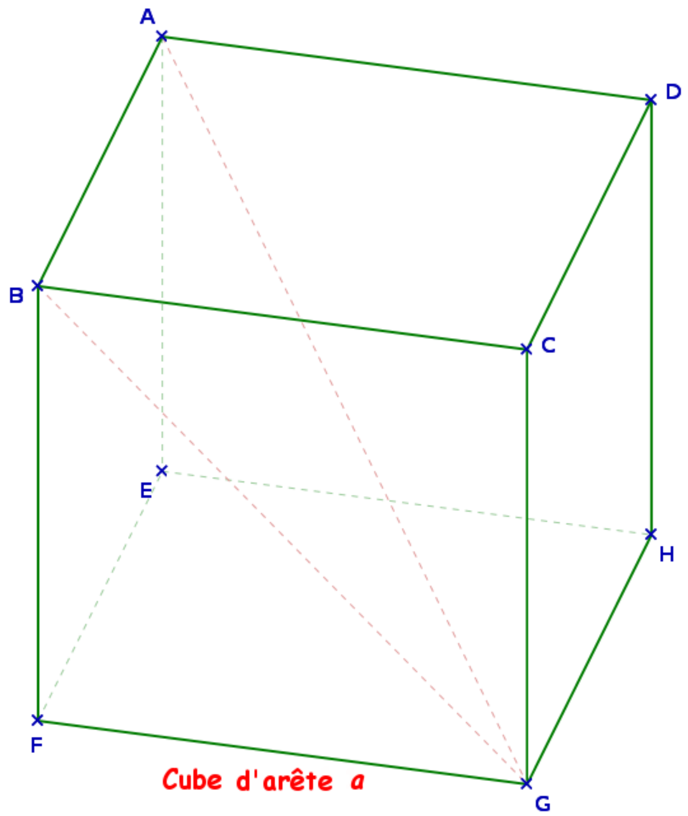
$HC^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$

$HC^2 = \frac{3a^2}{4}$

Donc $HC = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2}}{\sqrt{4}} = \boxed{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$

Par exemple la diagonale d'un triangle équilatéral de côté 1 est $\frac{\sqrt{3}}{2}$, celle d'un triangle équilatéral de côté 7 vaut $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

8.5.3 Longueur de la grande diagonale d'un cube d'arête a



On montre en deux étapes que la longueur de la grande diagonale ([AG] sur la figure) d'un cube d'arête a vaut $a\sqrt{3}$.

On sait que BFG est un triangle rectangle isocèle en F avec $FB = FG = a$.
D'après le théorème de Pythagore, on a :
$BG^2 = FB^2 + FG^2$
$BG^2 = a^2 + a^2$
$BG^2 = 2a^2 \qquad (*)$ **(on pourrait continuer le calcul mais cela ne sera pas nécessaire pour la suite)**

De même le triangle ABG (à l'intérieur du cube) est rectangle en B
D'après le théorème de Pythagore, on a :
$AG^2 = BA^2 + \underbrace{BG^2}$
$AG^2 = \ a^2 \ + \ 2a^2$ **d'après** $(*)$
$AG^2 = 3a^2$

Donc $AG = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \times \sqrt{a^2} = a\sqrt{3}$

Par exemple la grande diagonale d'un cube d'arête 1 vaut $\sqrt{3}$, celle d'un cube d'arête 5 vaut $5\sqrt{3}$.

8.5.4 Supprimer un radical au dénominateur d'une fraction

Supprimer un radical au dénominateur d'une fraction signifie supprimer une racine carrée du dénominateur de cette fraction sans changer sa valeur. Deux cas sont envisageables, soit nous multiplions numérateur et dénominateur par la même racine carrée, soit nous utilisons la 3ème identité remarquable.

$\boxed{\textbf{1}^{\textbf{er}}\textbf{ cas}}$

- $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

- $\dfrac{\sqrt{12}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{12}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{12\times 3}}{2\times 3} = \dfrac{\sqrt{36}}{6} = 1$

- $\dfrac{1+\sqrt{50}}{\sqrt{18}} = \dfrac{\left(1+\sqrt{50}\right)\times\sqrt{18}}{\sqrt{18}\times\sqrt{18}} = \dfrac{\sqrt{18}+\sqrt{18\times 50}}{18}$

$$= \dfrac{\sqrt{18}+\sqrt{900}}{18} = \dfrac{\sqrt{18}+30}{18}$$

$\boxed{\textbf{2}^{\textbf{ème}}\textbf{ cas}}$

- $\dfrac{7}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{7}{2+\sqrt{3}}\times\dfrac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{7\times(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

nous avons alors au dénominateur la 3ème identité remarquable.

$$= \dfrac{7\times 2-7\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \dfrac{14-7\sqrt{3}}{4-3} = 14-7\sqrt{3}$$

- $\dfrac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}-3} = \dfrac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}-3}\times\dfrac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}+3} = \dfrac{(\sqrt{10}+3)^2}{(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)}$

nous avons alors au numérateur la 1ère identité remarquable et au dénominateur la 3ème identité remarquable.

$$= \dfrac{(\sqrt{10})^2 \;+\; 2\sqrt{10}\times 3 \;+\; 3^2}{(\sqrt{10})^2-3^2} = 19+6\sqrt{10}$$

8.6 Devoir maison

Devoir de mathématiques

Les deux mots les plus brefs et les plus anciens, oui et non, sont ceux qui exigent le plus de réflexion.
(Pythagore)

Exercice 1 : Écrire A sous la forme $a\sqrt{2}$, B sous la forme $a\sqrt{3}$, C sous la forme $a\sqrt{6}$ et développer et réduire D.

$A = 2\sqrt{50} - 5\sqrt{8} + 3\sqrt{200}$ $\qquad B = \sqrt{12} - 5\sqrt{75} + 2\sqrt{147}$

$C = 2\sqrt{24} + \sqrt{96} - \sqrt{600}$ $\qquad D = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + 5\sqrt{2}\right)$

Exercice 2 : Un sac contient neuf boules : 2 jaunes, 3 vertes et 4 rouges. On tire au hasard une boule dans le sac, on note sa couleur (J,V ou R), on ne remet pas la boule tirée dans le sac puis on tire une seconde boule en notant à nouveau sa couleur.

1. Faire un arbre des possibles de cette expérience aléatoire.
2. Compléter cet arbre avec les probabilités de chaque branche.
3. À l'aide de l'arbre, calculer la probabilité de l'évènement "*obtenir au moins une boule jaune*".
4. En déduire la probabilité de l'évènement "*n'obtenir aucune boule jaune*".

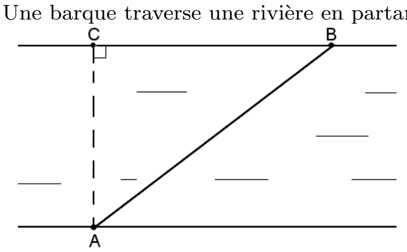
Exercice 3 : Nouvelle Calédonie 2008 (modifié)

Voici un tableau de proportionnalité donnant la vitesse exprimée en noeuds et la vitesse exprimée en mètres par seconde correspondante.

Vitesse mesurée en noeuds		1,028	1,285	1,542
Vitesse mesurée en m/s	1	2		3

a) Recopier et compléter le tableau.

Une barque traverse une rivière en partant d'un point A d'une rive pour arriver en un point B.



La traversée de A vers B s'effectue à la vitesse constante de 1,542 noeuds et dure 50 secondes.
b) Exprimer cette vitesse en m/s.
c) Montrer que la distance parcourue AB est de 150 m.
d) Sachant que $\widehat{BAC} = 60$ calculer AC et BC.

e) À 14h12, on décide de ramener la barque au port situé à 3 km. Le trajet se fait à la vitesse constante de 0,257 noeud. À quelle heure la barque arrivera-t-elle ?

Barème : 6 / 7,5 / 6,5

8.7 Corrigé du devoir maison

Corrigé du devoir de mathématiques

Les deux mots les plus brefs et les plus anciens, oui et non, sont ceux qui exigent le plus de réflexion.

(Pythagore)

Exercice 1 :

$A = 2\sqrt{50} \ - \ 5\sqrt{8} \ + \ 3\sqrt{200}$

$A = 2\sqrt{25\times 2} - 5\sqrt{4\times 2} + 3\sqrt{100\times 2}$

$A = 2\sqrt{25}\times\sqrt{2} \ - \ 5\sqrt{4}\times\sqrt{2} \ + \ 3\sqrt{100}\times\sqrt{2}$

$A = 2\times 5\sqrt{2} \ - \ 5\times 2\sqrt{2} \ + \ 3\times 10\sqrt{2}$

$A = 10\sqrt{2} \ - \ 10\sqrt{2} \ + \ 30\sqrt{2}$

$A = 30\sqrt{2}$

$B = \sqrt{12} \ - \ 5\sqrt{75} \ + \ 2\sqrt{147}$

$B = \sqrt{4\times 3} - 5\sqrt{25\times 3} + 2\sqrt{49\times 3}$

$B = \sqrt{4}\times\sqrt{3} \ - \ 5\sqrt{25}\times\sqrt{3} \ + \ 2\sqrt{49}\times\sqrt{3}$

$B = 2\times\sqrt{3} \ - \ 5\times 5\sqrt{3} \ + \ 2\times 7\sqrt{3}$

$B = 2\sqrt{3} \ - \ 25\sqrt{3} \ + \ 14\sqrt{3}$

$B = -9\sqrt{3}$

$C = 2\sqrt{24} \ + \ \sqrt{96} \ - \ \sqrt{600}$

$C = 2\sqrt{4\times 6} \ + \ \sqrt{16\times 6} \ - \ \sqrt{100\times 6}$

$C = 2\sqrt{4}\times\sqrt{6} \ + \ \sqrt{16}\times\sqrt{6} \ - \ \sqrt{100}\times\sqrt{6}$

$C = 2\times 2\sqrt{6} \ + \ 4\sqrt{6} \ - \ 10\sqrt{6}$

$C = 4\sqrt{6} \ + \ 4\sqrt{6} \ - \ 10\sqrt{6}$

$C = -2\sqrt{6}$

$D = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)$

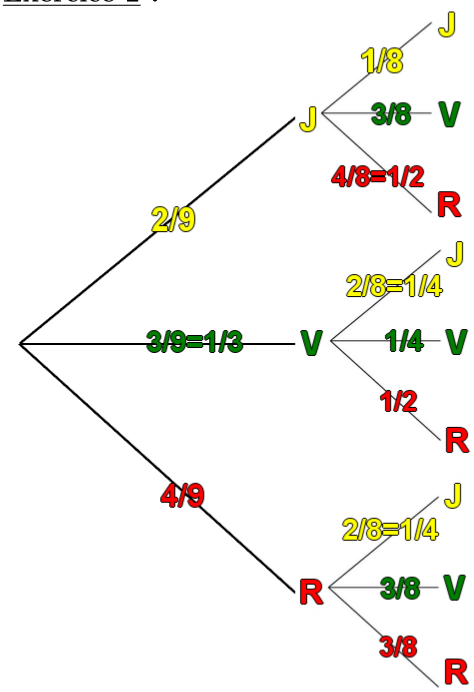
$D = \sqrt{3}\times\sqrt{3} \ + \ \sqrt{3}\times 5\sqrt{2} \ - \ \sqrt{2}\times\sqrt{3} \ - \ \sqrt{2}\times 5\sqrt{2}$

$D = 3 \ + \ \underbrace{5\sqrt{6}-\sqrt{6}} \ - 5\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$

$D = 3 \ + \ 4\sqrt{6} \ - \ 5\times 2$

$D = -7 + 4\sqrt{6}$

Exercice 2 :



3. Calcul de la probabilité de l'évènement "*obtenir au moins une boule jaune*".

Plusieurs issues correspondent à cet évènement :

•La première boule est jaune : évènement de probabilité $\frac{2}{9}$.

•La première boule est verte et la seconde est jaune : évènement de probabilité $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$.

•La première boule est rouge et la seconde est jaune : évènement de probabilité $\frac{\cancel{4}}{9}\times\frac{1}{\cancel{4}}=\frac{1}{9}$.

Pour conclure, la probabilité de l'évènement "*obtenir au moins une boule jaune*" est donc de : $\frac{2}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}=\frac{8}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

4. "*n'obtenir aucune boule jaune*" est l'évènement contraire de "*obtenir au moins une boule jaune*", la probabilité de l'évènement "*n'obtenir aucune boule jaune*" est donc : $1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$.

<u>Exercice 3</u> : Nouvelle Calédonie 2008 (modifié)

a)

Plusieurs méthodes sont possibles (*elles mènent évidemment toutes au mêmes résultats*).

Avec des produits en croix : $\dfrac{1 \times 1,028}{2} = 0,514$ et $\dfrac{2 \times 1,285}{1,028} = 2,5$

Vitesse mesurée en noeuds	**0,514**	1,028	1,285	1,542
Vitesse mesurée en m/s	1	2	**2,5**	3

b) La réponse est dans le tableau : 1,542 noeuds = 3 m/s

c) La distance (en m) est égale au produit de la vitesse (en m/s) par le temps (en s) : $AB = 3 \times 50 = 150$ soit 150 m.

d)

- On sait d'après le codage que le triangle ABC est rectangle en C, on peut donc y appliquer les formules de trigonométrie.
- $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AC}{AB}$ soit encore $\cos(60) = \dfrac{AC}{150}$ et donc $AC = 150 \times \cos(60) = 75$.
- En conclusion $AC = 75\ m$

Pour calculer la longueur BC, deux méthodes sont possibles, soit <u>nous</u> utilisons le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en C, soit nous utilisons le sinus de l'angle $\widehat{BAC}$.

Avec le théorème de Pythagore

- ABC est un triangle rectangle en C, l'hypoténuse est donc AB.
- D'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité :

$AB^2 = AC^2 + BC^2$
$150^2 = 75^2 + BC^2$
$BC^2 = 150^2 - 75^2$
$BC^2 = 16875$
$BC = \sqrt{16875} \approx 129,9$

- La longueur BC vaut donc environ 130 m.

Avec le sinus de $\widehat{BAC}$

- ABC est un triangle rectangle en C.
- $\sin\widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB}$ soit encore :

  $\sin(60) = \dfrac{BC}{150}$ donc :

  $BC = 150 \times \sin(60) \approx 129,9$

- Pour conclure, BC vaut 130 m environ.

e)
Calcul de la vitesse en m/s.
0,257 est la moitié de 0,514. 0,257 noeud correspond à une vitesse de 0,5 m/s (la moitié de 1 m/s).

Calcul de la durée du trajet en heure et minutes.
Le temps (en s) est égal au quotient de la distance (en m) par la vitesse (en m/s). Le temps nécessaire pour parcourir les
3 km (soit 3000 m) est donc de :

$$\frac{3000}{0,5} = 6000 \qquad \text{soit 6000 secondes}$$

Or $6000 \div 60 = 100$ donc 6000 s = 100 min = 1 h 40 min. Le trajet va donc durer 1 heure et 40 minutes.

Calcul de l'heure d'arrivée.
L'heure du départ étant 14h12, l'heure d'arrivée sera donc : 14 h 12 min + 1 h 40 min = 15 h 52 min, soit 15h52.

8.8 Interrogation écrite

Interrogation de mathématiques

Les professeurs ouvrent les portes mais vous devez entrer vous-même. (Proverbe chinois)

L'usage de la calculatrice est autorisé *(ouf !)*

<u>Exercice 1</u> : On donne les nombres suivants :

$A = 5\sqrt{32} + \sqrt{18} - 4\sqrt{50}\,;$	Écrire A sous la forme $a\sqrt{2}$
$B = \sqrt{12} - 5\sqrt{75} + 2\sqrt{147}\,;$	Écrire B sous la forme $a\sqrt{3}$
$C = 5\sqrt{12} + \sqrt{27} - 10\sqrt{3}\,;$	Écrire C sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers.
$D = (2 + 4\sqrt{5})(2 - 4\sqrt{5})\,;$	Montrer que D est un nombre entier.

<u>Exercice 2</u> :
(Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées et rédigées)

Un sac contient 10 jetons jaunes, 8 jetons verts et 2 jetons bleus.
Ces différents jetons sont indiscernables au toucher.

1. Thomas tire un jeton au hasard, note sa couleur puis remet le jeton tiré dans le sac. Quelle est la probabilité pour Thomas de tirer un jeton vert ?

2. Thomas effectue alors un second tirage. Quelle est la probabilité pour que le jeton tiré par Thomas ne soit pas bleu ?

3. Lors du second tirage, Thomas n'a pas remis le jeton tiré dans le sac ; sachant que ce jeton était jaune, quelle est alors la probabilité que le jeton tiré lors d'un troisième tirage soit bleu ?

Barème :
Ex 1 : 6 (1,5 par calcul)
Ex 2 : 4 (1/1,5/1,5)

8.9 Corrigé de l'interrogation écrite

Corrigé de l'interrogation de mathématiques

Les professeurs ouvrent les portes mais vous devez entrer vous-même. (Proverbe chinois)

L'usage de la calculatrice est autorisé *(ouf !)*

Exercice 1 : On donne les nombres suivants :

$A = 5\sqrt{32} + \sqrt{18} - 4\sqrt{50}$
$A = 5\sqrt{16}\sqrt{2} + \sqrt{9}\sqrt{2} - 4\sqrt{25}\sqrt{2}$
$A = 5 \times 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4 \times 5\sqrt{2}$
$A = 20\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 20\sqrt{2}$
$A = 3\sqrt{2}$

$B = \sqrt{12} - 5\sqrt{75} + 2\sqrt{147}$
$B = \sqrt{4}\sqrt{3} - 5\sqrt{25}\sqrt{3} + 2\sqrt{49}\sqrt{3}$
$B = 2\sqrt{3} - 5 \times 5\sqrt{3} + 2 \times 7\sqrt{3}$
$B = 2\sqrt{3} - 25\sqrt{3} + 14\sqrt{3}$
$B = -9\sqrt{3}$

$C = 5\sqrt{12} + \sqrt{27} - 10\sqrt{3}$
$C = 5\sqrt{4}\sqrt{3} + \sqrt{9}\sqrt{3} - 10\sqrt{3}$
$C = 5 \times 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 10\sqrt{3}$
$C = 10\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 10\sqrt{3}$
$C = 3\sqrt{3}$

$D = (2 + 4\sqrt{5})(2 - 4\sqrt{5})$ (identité remarquable)
$D = 2^2 - (4\sqrt{5})^2$
$D = 4 - 4^2(\sqrt{5})^2$
$D = 4 - 16 \times 5$
$D = 4 - 80 = -76$

Exercice 2 :
(Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées et rédigées)

Un sac contient 10 jetons jaunes, 8 jetons verts et 2 jetons bleus.
Ces différents jetons sont indiscernables au toucher.

1. Thomas tire un jeton au hasard, note sa couleur puis remet le jeton tiré dans le sac. Quelle est la probabilité pour Thomas de tirer un jeton vert ?
   Il y a 8 jetons verts sur 20 au total, la probabilité de tirer un jeton vert est donc de $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$
2. Thomas effectue alors un second tirage. Quelle est la probabilité pour que le jeton tiré par Thomas ne soit pas bleu ?
   Si le jeton tiré n'est pas bleu cela signifie qu'il est jaune ou vert. Il y a donc en tout $10 + 8 = 18$ **cas favorables sur 20 au total, la probabilité que le jeton tiré ne soit pas bleu est donc de** $\frac{18}{20} = \frac{9}{10}$
3. Lors du second tirage, Thomas n'a pas remis le jeton tiré dans le sac ; sachant que ce jeton était jaune, quelle est alors la probabilité que le jeton tiré lors d'un troisième tirage soit bleu ?
   Pour ce troisième tirage, il y a un jeton jaune en moins, on a donc 9 jetons jaunes, 8 jetons verts et 2 jetons bleus et donc 19 jetons au total. La probabilité que le jeton tiré soit bleu est donc de $\frac{2}{19} \approx 0,105$

Barème :
Ex 1 : 6 (1,5 par calcul)
Ex 2 : 4 (1/1,5/1,5)

Chapitre 9

Sphères et boules

9.1 Définition

Définition 24.

Une **sphère** de centre O et de rayon R est constituée de l'ensemble des points de l'espace situés à une distance R du centre O. *(une sphère est donc vide !)*

Exemples : Une balle de tennis ou de ping-pong, un ballon,...

Définition 25.

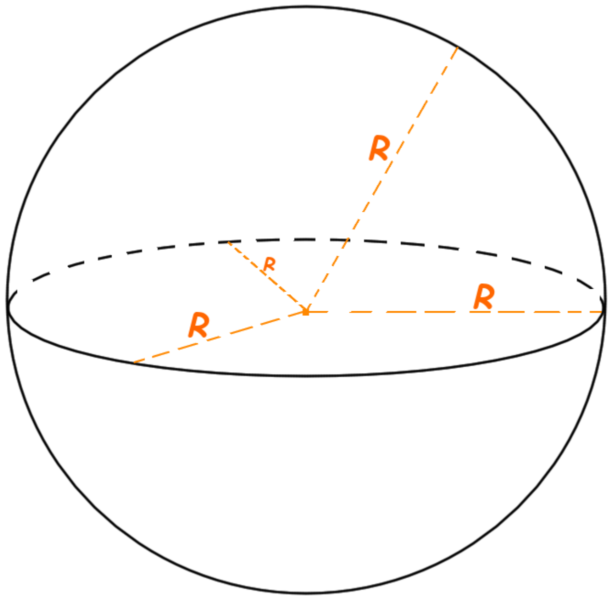
Une **boule** de centre O et de rayon R est constituée de l'ensemble des points de l'espace situés à une distance inférieure ou égale à R du centre O. *(une boule est donc pleine !)*

Exemples : Une boule de billard, les planètes,...

Définition 26.

Un **rayon** d'une sphère (ou d'une boule) est un segment dont les extrémités sont : le centre de la sphère (ou de la boule) et un point de la sphère (ou de la boule).

Remarques :
Sur un dessin en perspective, on représente une sphère par un cercle et éventuellement une ellipse (ovale). Tous les rayons ont évidemment la même longueur même si cela peut paraître faux sur une vue en perspective (voir la figure suivante).



9.2 Sections de sphères et boules par un plan

Définition 27.

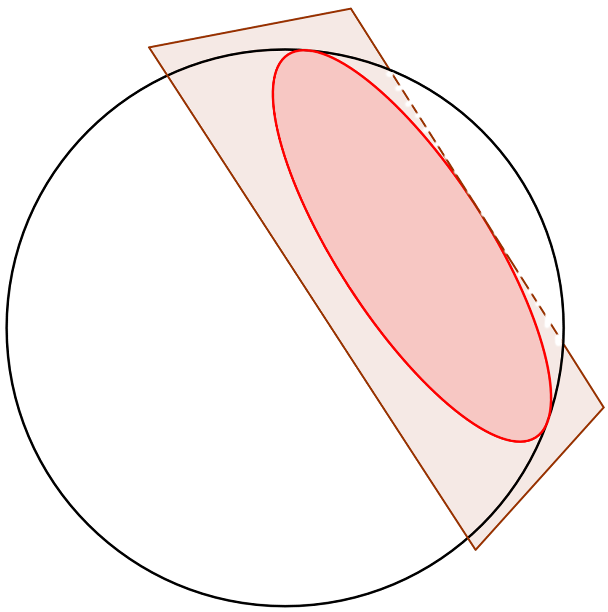
La section d'un objet géométrique par un plan est l'intersection de cet objet par ce plan.

Remarque : Un peu d'imagination, visuellement la section est la forme géométrique du lieu où le plan à coupé l'objet. On peut imaginer ce que l'on veut comme objet (un cube, un sphère, un dodécaèdre,...) puis on coupe cet objet (bien droit) et on regarde la forme de l'objet là où il a été coupé.

Propriété 28.

La section d'une **sphère** par un plan est un **cercle**.
La section d'une **boule** par un plan est un **disque**.

Exemple :



Le plan coupe la sphère (ou la boule). La section de la sphère par le plan est le cercle (en rouge foncé) et la section de la boule par le plan est le disque (en rouge clair).

Définition 28.

Un **grand cercle** sur une sphère est la section de cette sphère par un plan qui passe par le centre de celle-ci.

Remarque : Un *grand cercle* sur une sphère est aussi un cercle du plus grand rayon possible que l'on puisse tracer sur la sphère.

9.3 Volume et surface

9.3.1 Surface

Propriété 29.

On peut calculer la surface d'une sphère (ou d'une boule) de rayon R grâce à la formule suivante :

$$\boxed{\mathcal{S} = 4 \times \pi \times R^2}$$

Exemple :
La Terre a un rayon approximatif de $6\,400km$, sa surface totale est donc d'environ : $514\,718\,540\,km^2$

$$4 \times \pi \times 6400 \times 6400 \approx 514\,718\,540$$

9.3.2 Volume

Propriété 30.

On peut calculer le volume d'une sphère (ou d'une boule) de rayon R grâce à la formule suivante :

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3}$$

Exemple :
La Lune a un rayon approximatif de $1\,700km$, son volume totale est donc d'environ : $20\,579\,526\,276\,km^3$

$$\frac{4}{3} \times \pi \times 1700 \times 1700 \times 1700 \approx 20\,579\,526\,276$$

9.4 Devoir maison

Devoir de mathématiques

La science consiste à passer d'un étonnement à un autre.
(Aristote)

Exercice 1 :

a) Écrire A et B sous forme de fractions irréductibles.

$$A = \frac{2 - \frac{4}{7}}{2 + \frac{4}{7}} \qquad B = \frac{5}{9} - \frac{2}{9} \times \frac{5}{3}$$

b) Écrire C et D sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des nombres entiers.

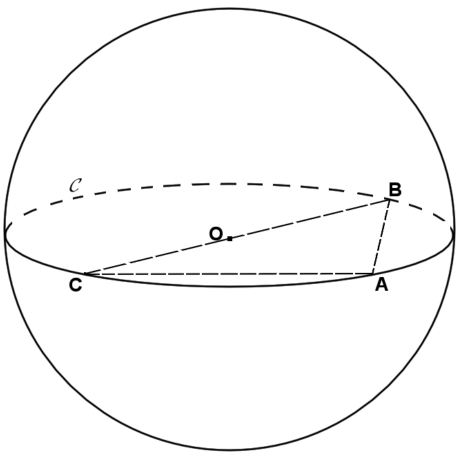
$$C = (\sqrt{3} - 3)^2 \qquad D = (\sqrt{3} - 1)^2$$

c) Montrer que $\frac{C}{D}$ est un nombre entier puis en déduire que le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

A	***C***
B	***D***

Exercice 2 :

B et C sont deux points diamétralement opposés d'une sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de diamètre 6 cm. On nomme $\mathcal{C}$ le grand cercle de la sphère qui passe par B et C. A est un point de $\mathcal{C}$ tel que AB=4,8cm. ***(Les questions sont indépendantes)***



1. Tracer le cercle $\mathcal{C}$ en vraie grandeur et placer les points A,B,C et O.

2. Quelle est la nature du triangle ABC (justifier) ? Calculer alors la longueur du segment [AC].

3. On place D le milieu de [AB], (CD) coupe alors (AO) en I. Quelle est la longueur de [AI] ? (justifier)

4. On désire remplir cette sphère avec du sable. Sachant que la densité moyenne du sable est de 1,85 g par cm^3 donner un arrondi au gramme près de la masse de sable nécessaire pour remplir la sphère.

Barème : Ex I : 2/2/1 ; Ex 2 : 0,5/2/1/1,5

9.5 Corrigé du devoir maison

<u>Exercice 1</u> :

a) Écrire A et B sous forme de fractions irréductibles.

$$A = \dfrac{2-\dfrac{4}{7}}{2+\dfrac{4}{7}} = \dfrac{\dfrac{14}{7}-\dfrac{4}{7}}{\dfrac{14}{7}+\dfrac{4}{7}} = \dfrac{\dfrac{10}{7}}{\dfrac{18}{7}} = \dfrac{10}{\cancel{7}} \times \dfrac{\cancel{7}}{18} = \dfrac{10}{18} = \boxed{\dfrac{5}{9}}$$

$$B = \dfrac{5}{9} - \dfrac{2}{9} \times \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{9} - \dfrac{2\times 5}{9\times 3} = \dfrac{5}{9} - \dfrac{10}{27} = \dfrac{5\times 3}{9\times 3} - \dfrac{10}{27} = \dfrac{15}{27} - \dfrac{10}{27} = \boxed{\dfrac{5}{27}}$$

b) Écrire C et D sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des nombres entiers. **(on va utiliser ici les identités remarquables)**

$$C = (\sqrt{3}-3)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\times 3\sqrt{3} + 3^2 = 3 - 6\sqrt{3} + 9 = \boxed{12 - 6\sqrt{3}}$$

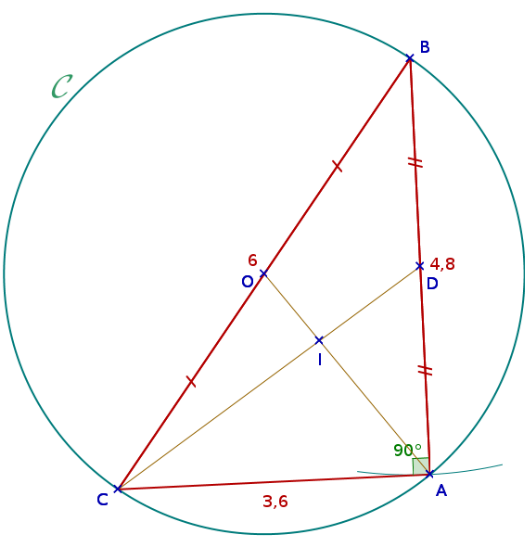
$$D = (\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\times 1\sqrt{3} + 1^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = \boxed{4 - 2\sqrt{3}}$$

c) $\dfrac{C}{D} = \dfrac{12-6\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} = \dfrac{3\times \cancel{(4-2\sqrt{3})}}{\cancel{4-2\sqrt{3}}} = \boxed{3}$ et $\dfrac{A}{B} = \dfrac{\dfrac{5}{9}}{\dfrac{5}{27}} = \dfrac{\cancel{5}}{9} \times \dfrac{27}{\cancel{5}} = \dfrac{27}{9} = \boxed{3}$

A	***C***
B	***D***

est donc bien un tableau de proportionnalité.

<u>Exercice 2</u> :



1.

2.
On sait que ABC est inscrit dans un cercle de diamètre [BC]
Or si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre l'un de ses côtés alors ce triangle est rectangle et ce côté est l'hypoténuse.
Donc ABC est un triangle rectangle en A.

On sait que ABC est un triangle rectangle en A.
Or d'après le théorème de Pythagore, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$
Donc : $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 6^2 - 4,8^2 = 12,96$ et $AC = \sqrt{12,96} = \boxed{3,6}$.

3.
On sait que O est le milieu de [BC] et D est le milieu de [AB].
Or la médiane d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui coupe le côté opposé à ce sommet en son milieu.
Donc (AO) et (CD) sont des médianes du triangle ABC.

On sait que ABC est un triangle rectangle en A et (AO) est la médiane relative à l'hypoténuse.
Or dans un triangle rectangle la médiane relative à l'hypoténuse à pour longueur la moitié de celle de l'hypoténuse.
Donc $AO = 6 \div 2 = 3$.

On sait que les deux médianes (AO) et (CD) du triangle ABC se coupent en I (centre de gravité) et AO = 3 cm.
Or dans un triangle le centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane en partant d'un sommet.
Donc $AI = \frac{2}{3} \times 3 = \boxed{2}$.

4. Le rayon de cette sphère est de $3\,cm$, donc son volume est de $\frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 36\pi \approx 113,1\ (cm^3)$.
Étant donné qu'un centimètre cube de sable à une masse environ égale à $1,85\,g$, la masse de sable nécessaire pour remplir cette sphère est donc d'environ $36\pi \times 1,85 \approx 209,23$ soit $\boxed{209,23\,g}$.

Chapitre 10

Notions de fonctions

10.1 Définition

Définition 29.

Une **fonction** f est un objet mathématiques qui associe à un nombre x, un unique autre nombre que l'on note *f(x)* *(se lit : "f de x")*.

Remarques : On peut voir une fonction comme une sorte de "*machine*" qui, lorsqu'on lui donne un nombre : x va ensuite nous en rendre un autre : *f(x)*.

$x \longrightarrow \boxed{\textit{machine } f} \longrightarrow f(x)$ par exemple la "machine" racine carrée : $81 \longrightarrow \boxed{\sqrt{}} \longrightarrow 9$

Exemples :

• Si on appelle f la fonction "au carrée", on pourra écrire comme notation : $f(x) = x^2$ et on aura :
$f(4) = 4^2 = 16$; $f(-5) = (-5)^2 = 25$;...

• Si on appelle g la fonction "racine carrée", on pourra écrire comme notation : $g(x) = \sqrt{x}$ et on aura :
$g(81) = 9$; $g(625) = \sqrt{625} = 25$; $g(-9)$ n'est par contre pas définie.

• Si on appelle h la fonction "sinus", on pourra écrire comme notation : $h(x) = \sin(x)$ et on aura :
$h(30) = \sin(30) = 0,5$; $h(60) = \sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$;...

Définition 30 (Vocabulaire)**.**

Dans l'expression *f(x)*, on dit que x est la **variable** car on va être amené à choisir une valeur pour x et aussi à changer (faire *varier*) la valeur de x.

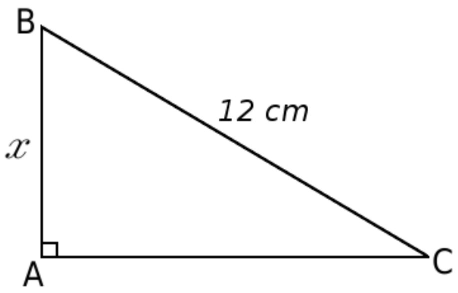
Exemples :

Dans tous les cas, lorsque l'on écrit, par exemple, *f(4)=16*, on dit que :
*16 est l'**image** de 4 par la fontion f* ou encore *4 est un **antécédent** de 16 par la fonction f*.
L'image est donc le résultat que donne la fonction quand on lui "donne" une valeur.

Remarque importante : J'attire l'attention du lecteur sur le fait que l'on dit bien "**l**'image" et non pas "**une** image" car pour tout nombre il n'y a qu'une seule image possible tandis que l'on dit "un antécédent" car il peut y en avoir plusieurs ! Par exemple, pour la fonction f définie précédemment ("au carrée"), 16 a deux antécédents possibles : 4 et -4.

Notation : On peut parfois voir aussi la notation : $f : x \mapsto x^2 - 3x$ (se lit : "La fonction f qui à x associe $x^2 - 3x$") qui a exactement la même signification que $f(x) = x^2 - 3x$.

Exemple plus complexe :



ABC est un triangle rectangle en A, on cherche à calculer la longueur du côté [AC] en fonction du nombre x, on notera cette longueur $f(x)$.

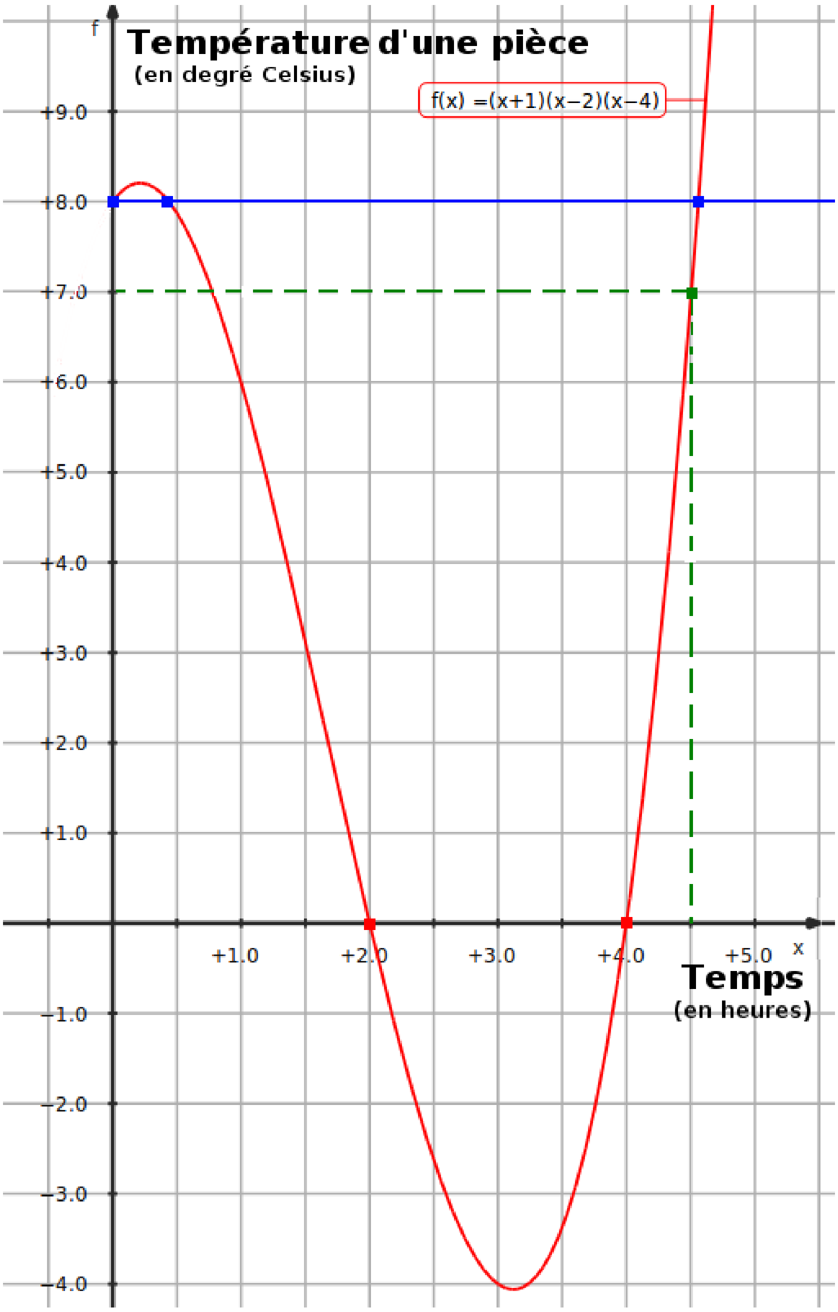
D'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité : $BC^2 = AC^2 + AB^2$ soit en remplaçant : $12^2 = AC^2 + x^2$ donc :
$AC^2 = 144 - x^2$ et $AC = \sqrt{144 - x^2}$ et donc :

$$f(x) = \sqrt{144 - x^2}$$

.

10.2 Diverses représentations

10.2.1 Avec un graphique



La courbe en rouge est la courbe représentative d'une fonction f.

Sur l'axe des abscisses nous avons le temps (en heure) et sur l'axe des ordonnées la température d'une pièce (en degré Celsius). Nous dirons donc que le graphique ci-contre représente **la température d'une pièce** **en fonction du** **temps**.
La variable est ici le temps.

On peut remarquer que la pièce est à zéro degré à deux instants différents : au bout de la deuxième heure et au bout de la quatrième heure (points rouges).

L'image de 4,5 par cette fonction est 7, ce qui signifie qu'au bout de 4 heures et demie la température de la pièce est de 7 degrés (en vert).

On peut remarquer aussi que le nombre 8 admet trois antécédents par cette fonction f (en bleu sur la courbe), cela signifie que la pièce a été à 8 degrés à trois instants différents.

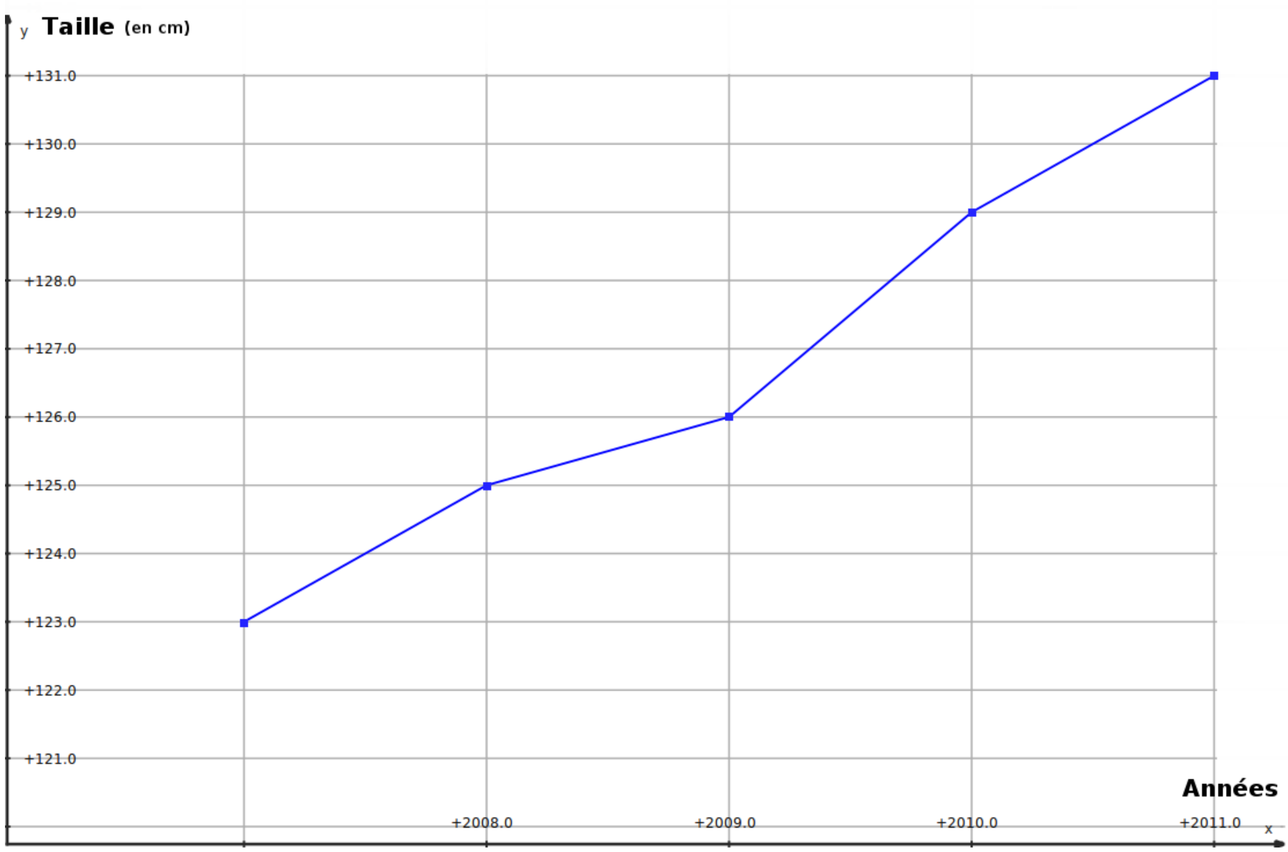
On peut se demander si le point A de coordonnées (1,5 ; 3) appartient à la courbe représentative de f, si cela est le cas alors l'image de 1,5 par la fonction f devrait être 3. Or $f(1,5) = (1,5+1)(1,5-2)(1,5-4) = 3,125$. Donc A n'appartient pas à la courbe représentative de la fonction f, mais il faudrait pouvoir zoomer pour le voir.

10.2.2 Avec un tableau

On peut aussi représenter une fonction à l'aide d'un tableau.

Années (**antécédents**)	2007	2008	2009	2010	2011
Taille de Zarakaï en cm (**images**)	123	125	126	129	131

Dans le tableau ci-dessus, on a la taille du nain Zarakaï en fonction des années. On peut alors faire une représentation graphique de la fonction "qui à l'année associe la taille en centimètre".



10.2.3 Avec une expression

Certaines fonctions peuvent s'exprimer directement à l'aide d'expressions, comme nous l'avons déjà vu plus haut, par exemple :

- $f(x) = x + 1$; l'image de 5 par f est alors 6 ; et l'image de 0 par f est 1.

- $g(y) = (y - 5)(y - 2)$; l'image de 5 par g est alors 0 ; et l'image de 0 par g est 10.

- $h(z) = \dfrac{\frac{2}{3}z^2 - 5z + 7}{\pi z + 5} - 2z^2 + \sqrt{5z^2 + 9}$; l'image de 0 par h est alors $\dfrac{7}{5} + 3 = 4,4$.

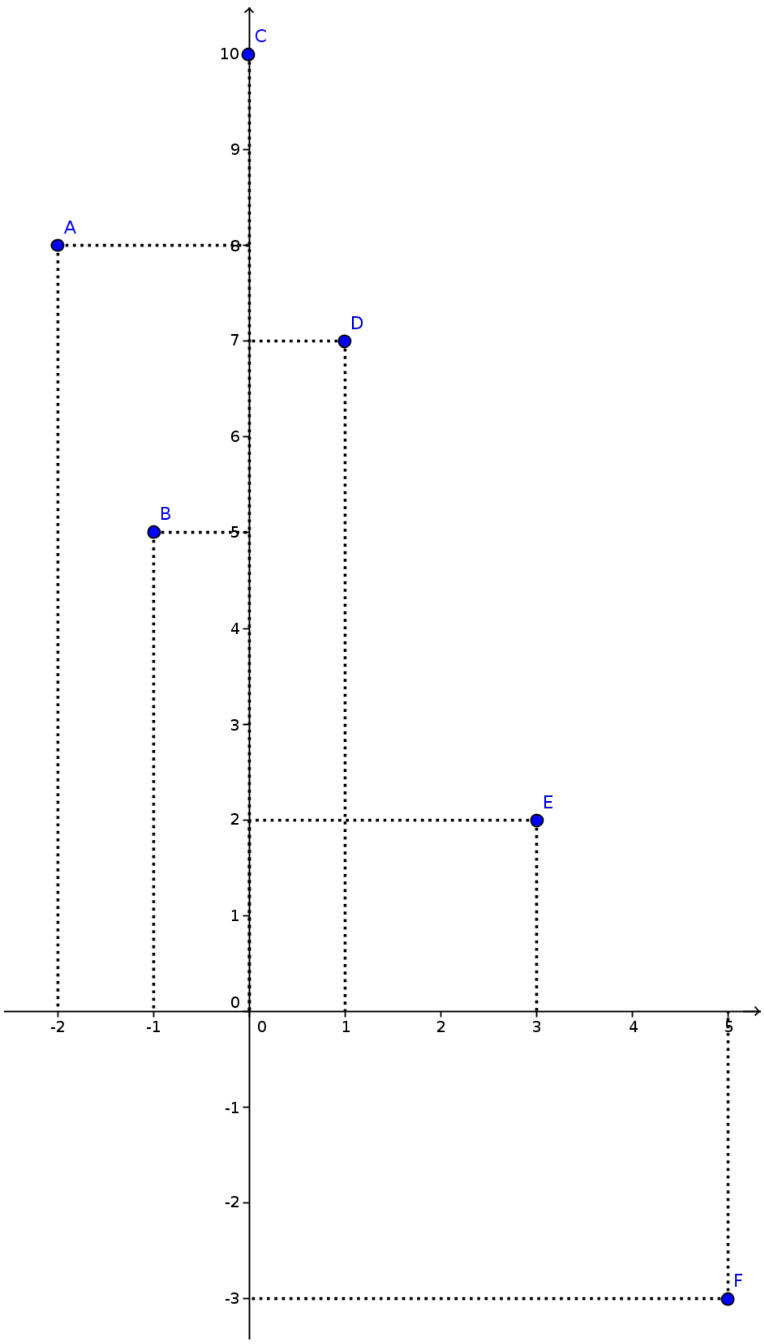
10.3 Construction d'un graphique

Remarque :
Si l'on connaît quelques valeurs d'une fonction (sous forme d'un tableau) ou si l'on connaît l'expression de cette fonction, on peut tenter de construire une représentation graphique **point par point**.

Exemple 1 : On connaît seulement quelques valeurs de la fonction.

x (antécédent)	-2	-1	0	1	3	5
$f(x)$ (images)	8	5	10	7	2	-3

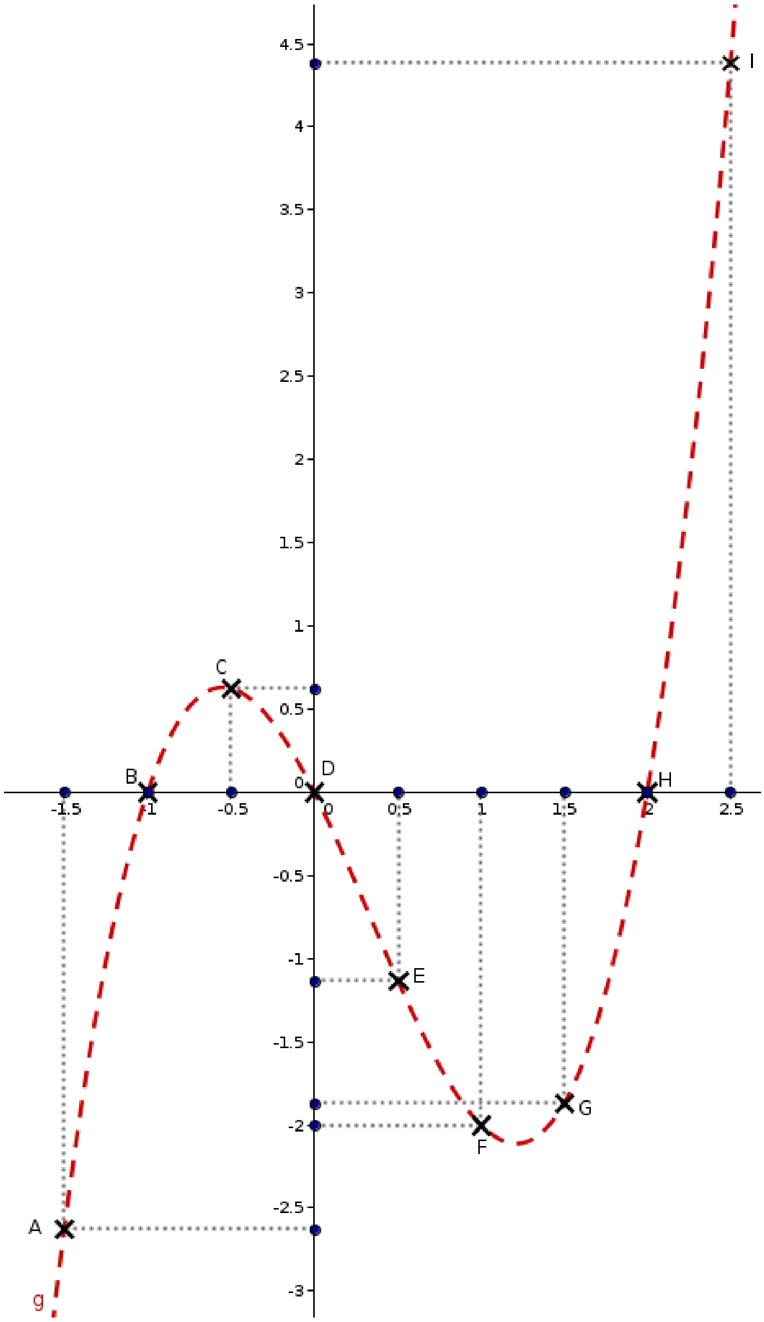
On construit alors pour chaque couple (antécédent ;image) un point dont les coordonnées (abscisse ;ordonnée) correspondent :



On sait maintenant que la courbe représentative de la fonction f passe par les points A, B, C, D, E et F mais on ne sait pas ce qu'il se passe entre ces points (la courbe représentative de f peut monter et descendre plusieurs fois entre A et B, ou pas). Pour cela il faut plus de points encore ou même mieux, il faut avoir l'expression de la fonction f.

Exemple 2 : On connaît l'expression de la fonction.

On cherche à construire une représentation de la fonction g dont l'expression est : $g(x) = x^3 - x^2 - 2x$



On calcule plusieurs valeurs de la fonction g (autant que l'on veut, ici 9 valeurs).
Par exemple, l'image de $-1,5$ est :

$$\begin{aligned} g(-1,5) &= (-1,5)^3 - (-1,5)^2 - 2 \times (-1,5) \\ &= -3,375 - 2,25 + 3 \\ &= -2,625 \end{aligned}$$

Points	x (antécédents)	$g(x)$ (images)
A	$-1,5$	$-2,625$
B	-1	0
C	$-0,5$	$0,625$
D	0	0
E	$0,5$	$-1,125$
F	1	-2
G	$1,5$	$-1,875$
H	2	0
I	$2,5$	$4,375$

Plus on aura de valeurs plus on pourra avoir une idée précise de la courbe représentative de la fonctions g que l'on peut déjà envisager en pointillés rouge.

10.4 Interrogation écrite

Interrogation de mathématiques

Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles que nous n'osons pas.
C'est parce que nous n'osons pas qu'elles sont difficiles. (Sénèque)

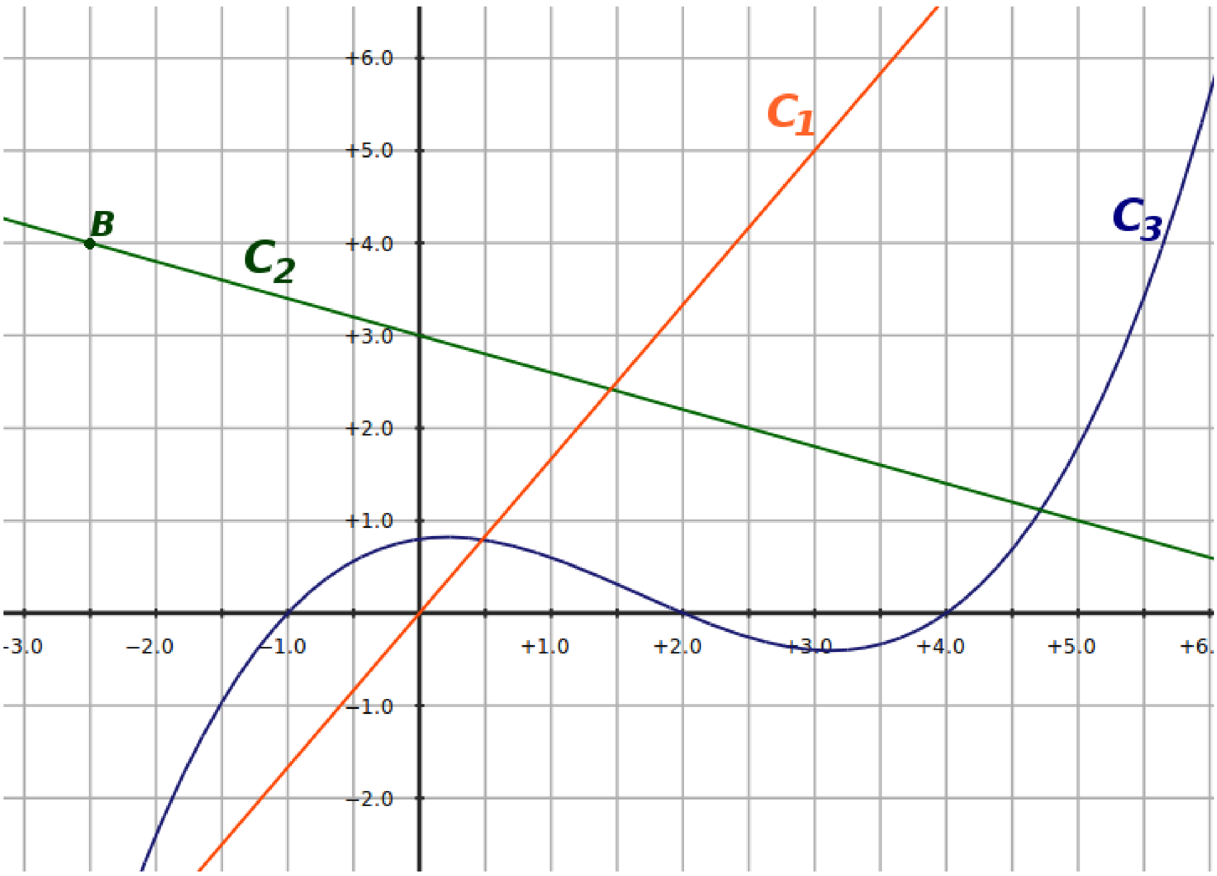
Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 5x^2 - 2x + 7$.

1. Quel nom donne-t-on à la lettre x ?
2. On remarque que $f(0) = 7$, faire une phrase avec le mot image et une autre avec le mot antécédent.
3. Donner l'image par f des nombres suivants (*détailler les calculs*) :

   $a)\ -2 \quad ; \quad b)\ 1 \quad ; \quad c)\ \sqrt{5}$

Exercice 2 : Ci-dessous les représentations graphiques de trois courbes : C_1 C_2 *et* C_3.



1. Lire graphiquement les coordonnées du point B. (*Faire une phrase !*)
2. Par lecture graphique, déterminer les abscisses des points d'intersections de la courbe C_3 avec l'axe des abscisses.
3. Quels sont les antécédents de 5 par la fonction dont la courbe représentative est C_1 ?
4. La fonction $f : x \mapsto -0,4x + 3$ a pour représentation graphique la courbe C_2. Le point A de coordonnées (4,6 ; 1,2) appartient-il à la courbe C_2 ? justifier par un calcul.

Barème : I : 0,5/2/2 II : 1/2/1/1,5

10.5 Corrigé de l'interrogation écrite

Corrigé de l'interrogation de mathématiques

Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles que nous n'osons pas.
C'est parce que nous n'osons pas qu'elles sont difficiles. (Sénèque)

Exercice 1 :

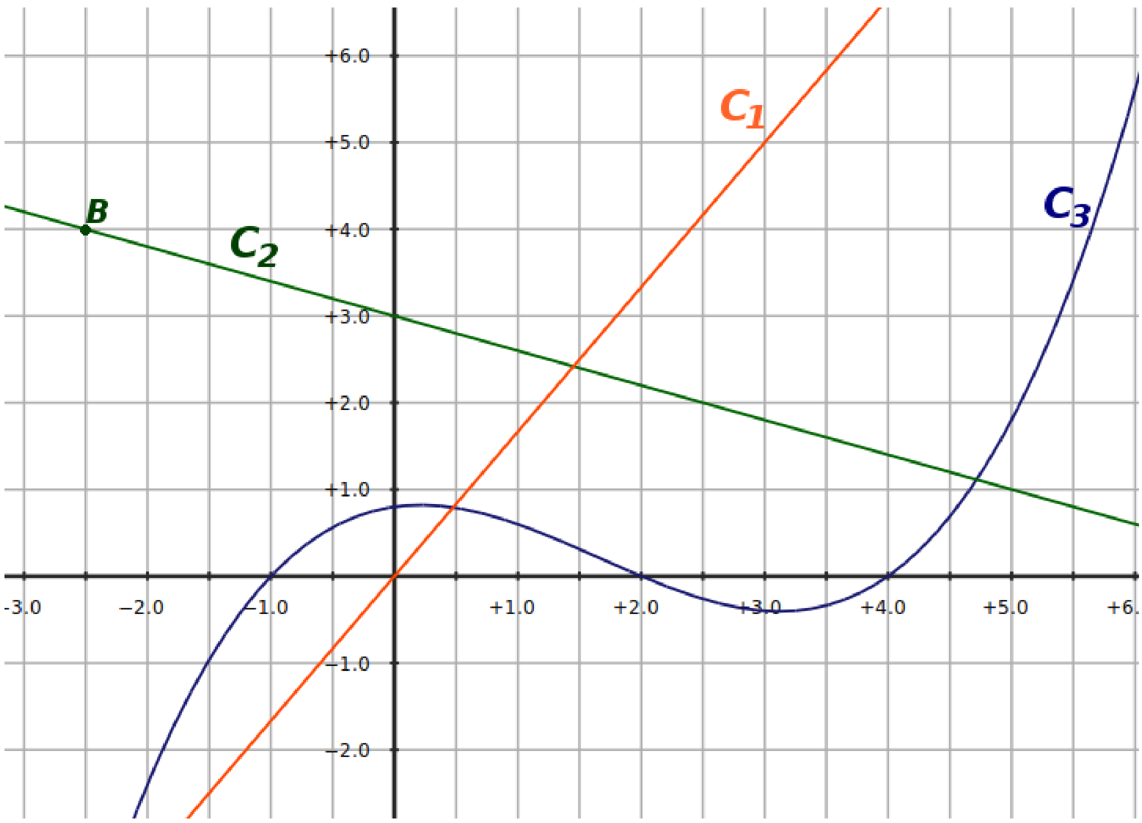
Soit f la fonction définie par $f(x) = 5x^2 - 2x + 7$.

1. **Quel nom donne-t-on à la lettre x ?**
   C'est la variable de la fonction.

2. **On remarque que $f(0) = 7$, faire une phrase avec le mot image et une autre avec le mot antécédent.**
   7 est l'image de 0 par la fonction f (*ou 0 a pour image 7 par la fonction* f). 0 est un antécédent de 7 par la fonction f.

3. **Donner l'image par f des nombres suivants (*détailler les calculs*) :**
   $f(-2) = 5 \times (-2)^2 - 2 \times (-2) + 7 = 5 \times 4 + 4 + 7 = 20 + 4 + 7 = \boxed{31}$
   $f(1) = 5 \times 1^2 - 2 \times 1 + 7 = 5 - 2 + 7 = \boxed{10}$
   $f(\sqrt{5}) = 5 \times (\sqrt{5})^2 - 2 \times \sqrt{5} + 7 = 5 \times 5 - 2\sqrt{5} + 7 = 25 - 2\sqrt{5} + 7 = \boxed{32 - 2\sqrt{5}}$

Exercice 2 : Ci-dessous les représentations graphiques de trois courbes : C_1 C_2 *et* C_3.



1. Le point B a pour coordonnées (-2,5 ; 4)
2. Les abscisses des points d'intersections de la courbe C_3 avec l'axe des abscisses sont : -1 ; 2 et 4.
3. L'antécédent de 5 par la fonction dont la courbe représentative est C_1 est : 3.
4. $f(4,6) = -0,4 \times 4,6 + 3 = -1,84 + 3 = 1,16 \neq 1,2$ donc le point A (4,6 ; 1,2) n'appartient pas à la courbe C_2.

Barème : I : 0,5/2/2 II : 1/2/1/1,5

Chapitre 11

Équations et inéquations

11.1 Équations

Définition 31.

Une **équation** est une égalité entre deux expressions littérales contenant des nombres **inconnues** représentés par des lettres.
Résoudre une équation signifie trouver toutes les valeurs possibles des inconnues pour lesquelles l'égalité est vraie.

Exemples : Dans la pratique il est possible de dire si un nombre est solution d'une équation sans résoudre celle-ci :

$$\boxed{7x + 9 = 2x + 27}$$

En testant l'égalité pour $x = -2$:

$$7x + 9 = 2x + 27$$

$$\begin{array}{r|l} 7 \times (-2) + 9 & 2 \times (-2) + 27 \\ -14 + 9 & -4 + 27 \\ -5 & 23 \end{array}$$

$-5 \neq 23$ donc -2 **n'est pas une solution de l'équation**.

En testant l'égalité pour $x = 3,6$:

$$7x + 9 = 2x + 27$$

$$\begin{array}{r|l} 7 \times 3,6 + 9 & 2 \times 3,6 + 27 \\ 25,2 + 9 & 7,2 + 27 \\ 34,2 & 34,2 \end{array}$$

Donc $3,6$ **est une solution de l'équation**.

$$\boxed{7x^3 - 2y = (x - y)^2 - 3}$$

C'est une équation à **deux inconnues** (x et y) de **degré 3** (car le plus grand exposant des inconnues est 3)
Si on remplace x par 0 et y par 1 on trouve alors dans le membre de gauche -2 et dans le membre de droite -2 aussi, $(0; 1)$ est donc une solution de l'équation (il y en à d'autres).
Dans ce chapitre nous n'étudierons que les équations à une inconnue.

Propriété 31.

On ne change pas les solutions d'une équation si l'on ajoute, soustrait, multiplie ou divise chaque membre par un **même nombre** non nul.

Remarque : Cette propriété va servir à résoudre une équation. **Pour cela il faudra se fixer comme objectif d'isoler les termes en x dans le membre de gauche et les nombres dans le membre de droite.**

Exemples et problème :

Tâchons de résoudre l'équation $8 - 7x = 13x + 25$.

$$\begin{array}{rcll}
8 - 7x & = & 13x + 25 & \\
8 - 7x - 13x & = & \underbrace{13x - 13x}_{=0} + 25 & \textit{On soustrait } 13x \textit{ dans chaque membre} \\
8 - 7x - 13x & = & 25 & \textit{On peut passer directement de la 1}^{\textit{ère}} \textit{ à la 3}^{\textit{ème}} \textit{ ligne} \\
8 - 20x & = & 25 & \\
-20x & = & 25 - 8 & \textit{On soustrait } 8 \textit{ dans chaque membre} \\
-20x & = & 17 & \textit{On divise chaque membre par } -20 \\
x & = & \boxed{\dfrac{17}{-20}} & \textit{On trouve alors la solution}
\end{array}$$

Tâchons de résoudre l'équation $-3(7 - 11x) = 3x + 15$.

$$\begin{array}{rcll}
-3(7 - 11x) & = & 3x + 15 & \textit{On développe le membre de gauche} \\
-21 + 33x & = & 3x + 15 & \textit{pour aller plus vite on place} \\
33x - 3x & = & 15 + 21 & \textit{tous les termes en } x \textit{ à gauche} \\
30x & = & 36 & \textit{et les nombres à droite en faisant} \\
x & = & 36 \div 30 & \textit{attention aux signes} \\
x & = & \boxed{1,2} &
\end{array}$$

Résolution d'un problème concret :

Plusieurs personnes mangent ensemble dans un restaurant. À la fin du repas elles décident de partager la note. Si chaque personne donne 25 € alors il y aura au total 13 € de trop et si chaque personne donne 20 € alors il manquera 32 €. Combien y avait-il de personnes au restaurant ? Quel était le prix total du repas ?

Résolution :

On résout un problème en trois étapes : 1) Choix de l'inconnue. 2) Mise en équation du problème et résolution. 3) Réponse.

1) Soit x le nombre de personnes présentes au repas.

2) Le prix du repas est alors : $25x - 13$ car si chaque personne donne 25 € il y a alors 13 € de trop. Le prix du repas peut aussi s'écrire $20x + 32$ car si chaque personne donne 20 € il manquera alors 13 €. On a donc l'équation :

$$25x - 13 = 20x + 32$$
$$25x - 20x = 32 + 13$$
$$5x = 45$$
$$x = \frac{45}{5} = 9$$

3) Il y avait donc 9 personnes au restaurant. De plus en remplçant x par 9 on trouve le prix du repas : $25 \times 9 - 13 = 225 - 13 = 212$ soit 212 €.

11.2 Équations produit nul

Propriété 32.

Un **produit** de facteurs est **nul** si et seulement si au moins l'un des **facteurs est nul**.

Remarque : le "*si et seulement si*" présent dans la propriété est très classique en mathématiques, il signifie que la propriété marche dans les deux sens : si le produit est nul alors un des facteurs est nul et réciproquement si l'un des facteurs est nul alors le produit est nul.
Dans la pratique cette propriété servira à résoudre des équations de degré plus grand que 1, voici les exemples :

Quatre exemples importants :

• $(5x-3)(2x+7)=0$ si on développe le membre de gauche de cette équation on verra qu'elle est de degré 2. C'est aussi un produit de deux facteurs : $(5x-3)$ et $(2x+7)$, ce produit étant nul la propriété précédente nous dit que l'on a :

$$\begin{array}{rclcrcl}
5x-3 & = & 0 & \textit{ou alors} & 2x+7 & = & 0 \\
5x & = & 3 & \textit{ou alors} & 2x & = & -7 \\
x & = & \boxed{\dfrac{3}{5}} & \textit{ou alors} & x & = & \boxed{\dfrac{-7}{2}}
\end{array}$$

L'équation a donc deux solutions : $\frac{3}{5}=$ et $\frac{-7}{2}$.

• $(x+4)(2x-3)(7x-11)=0$ de même que précédemment (*il faut citer au moins une fois la propriété*) :

$$\begin{array}{rclcrclcrcl}
x+4 & = & 0 & \textit{ou alors} & 2x-3 & = & 0 & \textit{ou alors} & 7x-11 & = & 0 \\
x & = & \boxed{-4} & \textit{ou alors} & 2x & = & 3 & \textit{ou alors} & 7x & = & 11 \\
 & & & & x & = & \boxed{\dfrac{3}{2}} & \textit{ou alors} & x & = & \boxed{\dfrac{11}{7}}
\end{array}$$

L'équation a donc trois solutions : -4, $\frac{3}{2}=$ et $\frac{11}{7}$.

• $(4x-9)^2+(4x-9)(x+15)=0$ ici c'est un petit peu plus compliqué puisqu'il ne s'agit pas d'un produit de facteurs ! Dans ce cas il faut penser à **factoriser** d'abord !

$$\begin{array}{rcl}
(4x-9)^2+(4x-9)(x+15) & = & (\underline{4x-9})(4x-9)+(\underline{4x-9})(x+15) \\
 & = & (4x-9)(4x-9+x+15) \\
 & = & (4x-9)(5x+6)
\end{array}$$

On peut maintenant appliquer la même méthode qu'auparavant, on trouvera alors deux solutions : $\frac{9}{4}$ et $\frac{-6}{5}$.

• $(8x+7)^2-64=0$ si le facteur commun n'est pas évident il faut alors penser aux **identités remarquables** pour factoriser !

$(8x+7)^2-64$
$(8x+7)^2-8^2$ on reconnaît l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ où $a=(8x+7)$ et $b=8$.
Donc :
$(8x+7)^2-8^2=(8x+7+8)(8x+7-8)=(8x+15)(8x-1)$, on a ainsi un produit de facteurs, il est alors possible de résoudre l'équation comme auparavant, on trouvera deux solutions : $\frac{-15}{8}$ et $\frac{1}{8}$.

11.3 Inéquations

Définition 32.

Une **inéquation** est une **inégalité** entre deux expressions littérales qui peut être vraie ou fausse selon les valeurs des inconnues.
Résoudre une inéquation signifie trouver toutes les valeurs possibles des inconnues pour lesquelles l'inégalité est vraie.

Exemple : l'inégalité $x^2 - 5 \leqslant (x-2)^2 + 3$

En testant l'inégalité pour $x = 4$:

$$x^2 - 5 \leqslant (x-2)^2 + 3$$

$$\begin{array}{r|l} 4^2 - 5 & (4-2)^2 + 3 \\ 16 - 5 & 4 + 3 \\ 11 & 7 \end{array}$$

$11 \not\leqslant 7$ donc 4 **n'est pas une solution de l'inéquation**.

En testant l'inégalité pour $x = 0$:

$$x^2 - 5 \leqslant (x-2)^2 + 3$$

$$\begin{array}{r|l} 0^2 - 5 & (0-2)^2 + 3 \\ -5 & 4 + 3 \\ & 7 \end{array}$$

$-5 \leqslant 7$ donc 0 **est une solution de l'équation**.

Remarque : 0 est donc une solution de l'inéquation mais c'est loin d'être la seule (1 ; $1,5$; 2 en sont aussi...). On peut réussir à trouver toutes les solutions en appliquant certaines règles :

Propriété 33.

On ne change pas les solutions d'une inéquation si l'on ajoute ou soustrait un **même nombre** à chaque membre.

On ne change pas les solutions d'une inéquation si l'on multiplie ou divise chaque membre par un même nombre **positif**.

Lorsque l'on multiplie ou divise chaque membre par un même nombre **négatif** on doit **changer le sens de l'inégalité** pour consever les solutions.

Remarque : En conclusion, pour résoudre une inéquation on applique exactement la même méthode que pour résoudre une équation à la différence près que si l'on multiplie ou divise les membres par un nombre négatif il faut changer le sens de l'inégalité.

Exemple : Tâchons de résoudre l'inéquation $-3x + 7 \leqslant 2x + 13$

$$\begin{aligned} -3x + 7 &\leqslant 2x + 13 \\ -3x - 2x &\leqslant 13 - 7 \\ -5x &\leqslant 6 \\ x &\geqslant \frac{6}{-5} \\ x &\geqslant -1,2 \end{aligned}$$

On change le sens de l'inégalité car on a divisé par $-5 < 0$

Les solutions de cette équation sont donc tous les nombres supérieurs ou égaux à $-1,2$, donc par exemple -1 ; 0 ; π ...

Un autre exemple : Tâchons de résoudre l'inéquation $8x - 5 > 5x + 22$

$$\begin{array}{rcl} 8x-5 & > & 5x+22 \\ 8x-5x & > & 22+5 \\ 3x & > & 27 \\ x & > & \dfrac{27}{3} \\ x & > & 9 \end{array}$$

On ne change le sens de l'inégalité car on a divisé par $3 > 0$

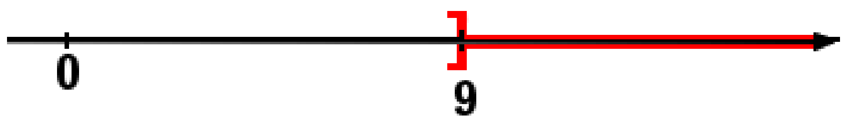
Les solutions de cette équation sont donc tous les nombres strictements supérieurs à 9, donc par exemple $9,1$; 100 ;...

11.4 Représentation des solutions sur une droite

Définition 33 (Notation)**.**

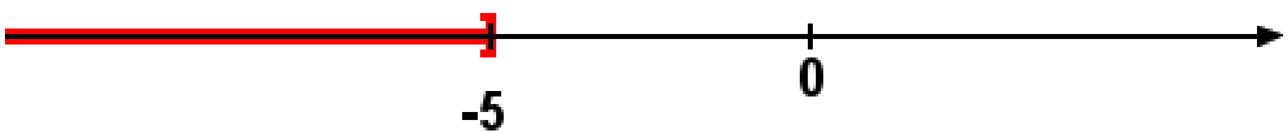
On peut représenter les solutions d'une inéquation à l'aide d'une droite graduée sur laquelle on va surligner ou hachurer les nombres qui sont solutions.

Exemple :
Par exemple dans la dernière inéquation, $\boldsymbol{x > 9}$ on aura :

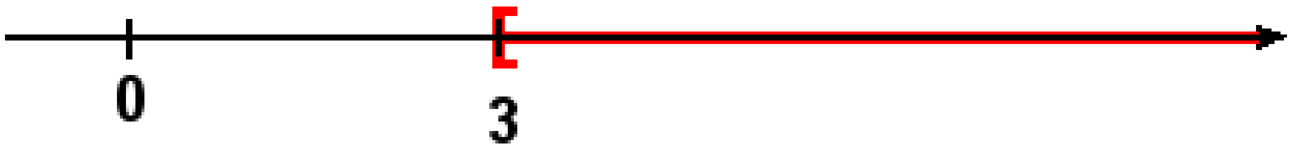


Remarque importante :
On remarquera le crochet au niveau du nombre 9, il est tourné dans le sens opposé au surlignage, cela signifie que le nombre 9 n'est pas une solution de l'inéquation, en effet on a trouvé $x > 9$ (l'inégalité est stricte).
Si le crochet est tourné dans le même sens que le surlignage cela signifie alors que le nombre fait partie des solutions, par exemple :

pour $\boldsymbol{x \leqslant -5}$ on aura :



Pour $\boldsymbol{x \geqslant 3}$ on aura :



11.5 Contrôle

Contrôle de mathématiques

L'enfant n'est pas un vase que l'on remplit mais un feu que l'on allume
(Rabelais)

Exercice 1 :

Voici une équation : $15x^2 - 12x + 24 = 20x + 7$
Sans chercher à résoudre l'équation, dire si les nombres suivants sont des solutions :

$$0 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad -2$$

Exercice 2 :

Résoudre les équations suivantes :
$a)$ $7x + 8 = 22 - 3x$ $b)$ $-5x + 3 = 17$

Exercice 3 :

On note A l'expression suivante : $A = (3x+2)^2 + (3x+2)(-x+7)$

1. Développer et réduire A.
2. Factoriser l'expression A.
3. Calculer A quand $x = 7$ puis quand $x = \dfrac{1}{2}$
4. Résoudre l'équation $A = 0$

Exercice 4 :

Un collège désire équiper un nouvelle salle informatique. Le budget informatique ne doit pas dépasser 8 600 € et la salle sera équipée d'une imprimante laser à 365 € et de 15 ordinateurs.
Quels peuvent être les prix d'un ordinateur ? (On prendra bien soin de résoudre le problème en trois étapes bien distinctes). Représenter les solutions sur une droite graduée.

BONUS : En équipant chaque ordinateur d'un système d'exploitation libre et gratuit (type manchot) on peut réaliser une économie de 22 % sur chaque poste. Combien d'ordinateurs l'économie réalisée permettrait-elle d'acheter ?

Barème : 4,5/4/7,5/4

11.6 Corrigé du contrôle

Exercice 1 :

Voici une équation : $15x^2 - 12x + 24 = 20x + 7$
Sans chercher à résoudre l'équation, dire si les nombres suivants sont des solutions :

$$15x^2 - 12x + 24 = 20x + 7$$

$$\begin{array}{r|l} 15 \times 0^2 - 12 \times 0 + 24 & 20 \times 0 + 7 \\ \boxed{24} & \boxed{7} \end{array}$$

0 n'est donc pas une solution de l'équation

$$15x^2 - 12x + 24 = 20x + 7$$

$$\begin{array}{r|l} 15 \times 1^2 - 12 \times 1 + 24 & 20 \times 1 + 7 \\ 15 - 12 + 24 & 20 + 7 \\ \boxed{27} & \boxed{27} \end{array}$$

1 est donc une solution de l'équation

$$15x^2 - 12x + 24 = 20x + 7$$

$$\begin{array}{r|l} 15 \times (-2)^2 - 12 \times (-2) + 24 & 20 \times (-2) + 7 \\ 60 + 24 + 24 & -40 + 7 \\ \boxed{108} & \boxed{-33} \end{array}$$

-2 n'est donc pas une solution de l'équation

Exercice 2 :

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned} 7x + 8 &= 22 - 3x \\ 7x + 3x &= 22 - 8 \\ 10x &= 14 \\ x &= \boxed{\frac{14}{10} = 1,4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5x + 3 &= 17 \\ -5x &= 17 - 3 \\ -5x &= 14 \\ x &= \boxed{\frac{14}{-5} = -2,8} \end{aligned}$$

Exercice 3 :

1) Développer et réduire

$$\begin{aligned} A &= (3x+2)^2 + (3x+2)(-x+7) \\ &= 9x^2 + 12x + 4 \ - 3x^2 + 21x - 2x + 14 \\ &= 6x^2 + 31x + 18 \end{aligned}$$

2) Factoriser

$$\begin{aligned} A &= (3x+2)^2 + (3x+2)(-x+7) \\ &= \underline{(3x+2)}(3x+2) + \underline{(3x+2)}(-x+7) \\ &= (3x+2)(3x+2-x+7) \\ &= (3x+2)(2x+9) \end{aligned}$$

3) Si $x = 7$ alors :

$$\begin{aligned} A &= (3x+2)^2 + (3x+2)(-x+7) \\ A &= (3 \times 7 + 2)^2 + (3 \times 7 + 2)(\underbrace{-7+7}_{=0}) \\ &= (3 \times 7 + 2)^2 \\ &= 23^2 = \boxed{529} \end{aligned}$$

Si $x = \dfrac{1}{2}$ alors :

$$\begin{aligned} A &= (3x+2)(2x+9) \\ &= (3 \times \tfrac{1}{2} + 2)(2 \times \tfrac{1}{2} + 9) \\ &= (\tfrac{3}{2} + 2)(1 + 9) \\ &= 3,5 \times 10 \\ &= \boxed{35} \end{aligned}$$

4) Le produit $(3x+2)(2x+9)$ est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul, donc :

$$\begin{array}{rcl c rcl} 3x + 2 &=& 0 & \text{ou} & 2x + 9 &=& 0 \\ 3x &=& -2 & \text{ou} & 2x &=& -9 \\ x &=& \dfrac{-2}{3} & \text{ou} & x &=& \dfrac{-9}{4} \end{array}$$

L'équation $A = 0$ possède donc deux solutions : $\dfrac{-2}{3}$ et $\dfrac{-9}{4}$

Exercice 4 :

Soit x le prix d'un ordinateur. Le problème se traduit alors par :

$15x + 365 \leqslant 8600$
$15x \leqslant 8600 - 365$
$x \leqslant \dfrac{8235}{15} = \boxed{549}$

Le prix d'un ordinateur est donc inférieur ou égal à 549 €.
Bonus

22 % de 529 font $\frac{22}{100} \times 549 = 120,78$

Le prix d'un ordinateur est alors de : $549 - 120,78 = 428,22$.
On peut alors acheter $\frac{8600-365}{428,22} \approx 19,2$ soit 19 ordinateurs donc **4 en plus**.

Chapitre 12

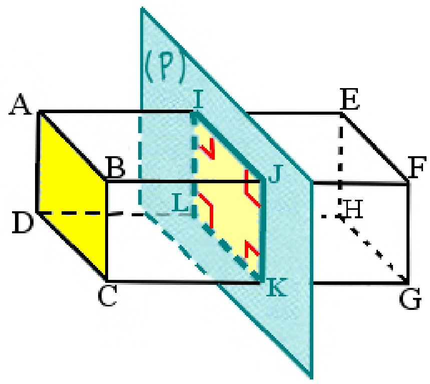
Sections planes

12.1 Parallélépipèdes rectangles

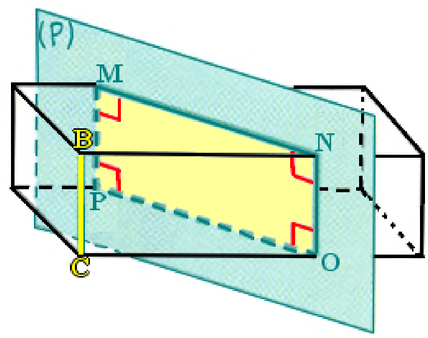
Propriété 34.

La section d'un **parallélépipède rectangle** par un plan parallèle à une face ou une arête est un **rectangle** possédant une dimension commune avec le parallélépipède rectangle.

Exemples :



La section du pavé par un plan (P) parallèle à la face ABCD est le rectangle IJKL.



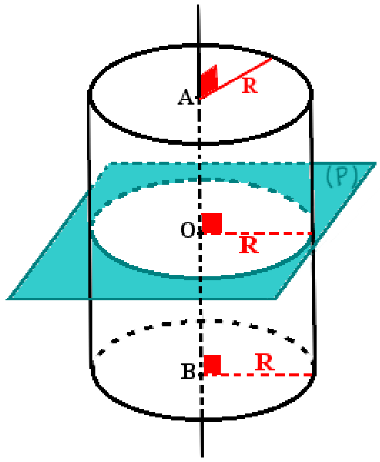
La section du pavé par un plan (P) parallèle à l'arête [BC] est le rectangle MNOP, de plus BC = MP = NO.

12.2 Cylindres

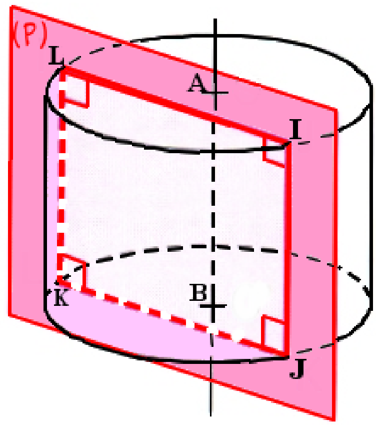
Propriété 35.

La section d'un **cylindre** par un plan **perpendiculaire** à son axe est un **cercle** de même rayon que la base du cylindre.
La section d'un **cylindre** par un plan **parallèle** à son axe est un **rectangle** dont l'une des dimensions est la hauteur du cylindre.

Exemples :



La section du cylindre par un plan (P) perpendiculaire à son axe (AB) est le cercle de centre O et de rayon R.



La section du cylindre par un plan (P) parallèle à son axe (AB) est le rectangle IJKL, de plus IJ = KL = AB.

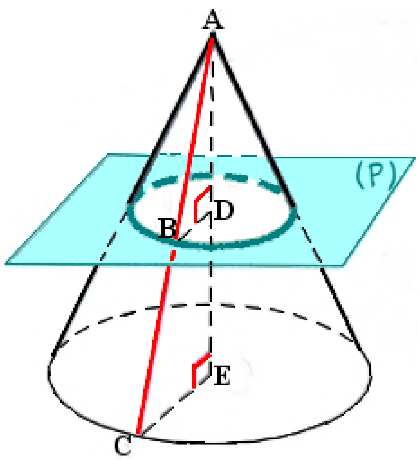
Rappel :
Le **volume** d'un cylindre se calcule grâce à la formule : $\pi R^2 h$ où R désigne le rayon de la base du cylindre et h la hauteur du cylindre.

12.3 Pyramides et cônes de révolution

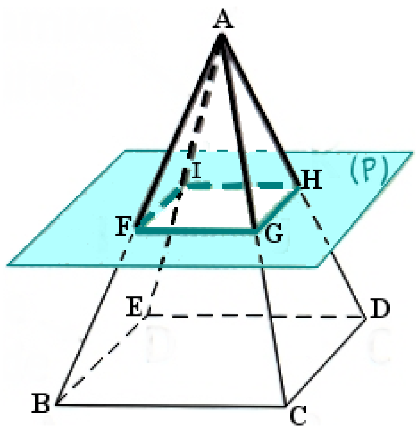
Propriété 36.

La section d'une **pyramide** ou d'un **cône de révolution** par un plan **parallèle à sa base** est une **réduction de sa base**.

Exemples :



La section du cône de révolution par un plan (P) parallèle à sa base est donc un cercle, de plus on a :
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$$



La section de cette pyramide à base carré par un plan (P) parallèle à sa base est donc un carré FGHI, de plus :
$$\frac{AG}{AC} = \frac{AH}{AD} = \frac{GH}{CD} = \dots$$

Vocabulaire :
En regardant les figures dans le même sens que l'exemple, on nomme *"cône réduit"* ou *"pyramide réduite"* la partie située au dessus du plan (P) et *"tronc de cône"* ou *"tronc de pyramide"* la partie située en dessous du plan (P).

Rappel :

Le **volume** d'une pyramide ou d'un cône de révolution se calcule grâce à la formule : $\dfrac{\mathcal{A}_{\mathfrak{B}} \times h}{3}$ où $\mathcal{A}_{\mathfrak{B}}$ désigne l'aire de la base et h la hauteur.

Exemple d'application :

Avec le cône de révolution précédent, si AE $= 12$ cm et AD $= 4$ cm alors par définition, le coefficient de réduction est : $\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} < 1$.
Si l'on suppose que CE $= 5$ cm alors l'aire de la base du grand cône vaut $\pi \times 5^2 = 25\pi$ et le volume du cône vaut $\dfrac{\pi \times 5^2 \times 12}{3} = 100\pi$
Le petit cône étant une réduction de coefficient $\dfrac{1}{3}$, on sait alors d'après le chapitre "Thalès - agrandissement - réduction" que l'aire de la base du cône réduit est $25\pi \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{25\pi}{9}$ et le volume du cône réduit est $100\pi \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 = \dfrac{25\pi}{16}$.

Chapitre 13

Fonctions affines et linéaires

13.1 Définitions

Définition 34.

Une fonction f est **affine** si elle peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b$, où a et b sont des nombres réels.

On dit alors que a est le **coefficient directeur** de la fonction affine et b est l'**ordonnée à l'origine** de la fonction affine.

Exemple :

$f(x) = 5x + 8\,;\quad g(x) = 2,5x - 7\,;\quad$ et $\quad h(x) = -2x - 3,4\quad$ sont des fonctions affines.

Remarque :

Évidemment si l'on échange les deux termes on a toujours une fonction affine... $h(x) = -3,4 - 2x$ est affine.

Définition 35.

Une fonction f est **linéaire** si elle peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax$, où a est un nombre réel.

Exemple :

$f(x) = -15x$ et $g(t) = 8t$ sont des fonctions linéaires.

Remarques :

1) Les fonctions linéaires sont donc aussi des fonctions affines avec une ordonnée à l'origine nulle ($b = 0$).

2) Pourquoi étudier les fonctions affines et leurs cas particuliers : les fonctions linéaires ? Parce que ce sont les fonctions les plus simples, comme nous le verrons plus tard, leurs représentations graphiques sont des droites et en sciences on préfère on général ramener un problème à l'étude de droites plutôt que d'autres choses qui peuvent être beaucoup trop complexes.

13.2 Un exemple particulier

Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{8}{5}x - 3$. C'est bien une fonction affine de coefficient directeur $\dfrac{8}{5} = 1,6$ mais ça n'est pas une fonction linéaire puisque son ordonnée à l'origine n'est pas nulle mais vaut -3.

Calculons quelques valeurs de la fonction f en certains points, par exemple 0 ; 15 ; et -5 :

$$f(0) = \frac{8}{5} \times 0 - 3 = -3 \quad ; \quad f(15) = \frac{8}{5} \times 15 - 3 = 21 \quad ; \quad f(-5) = \frac{8}{5} \times (-5) - 3 - 8 - 3 = -11$$

On peut regrouper les valeurs calculées dans un tableau ayant en première ligne les antécédents (les valeurs choisies de x) et en seconde ligne les images (les valeurs renvoyées par la fonctions f) :

x (antécédents)	0	15	-5
$f(x)$ (images)	-3	21	-11

13.3 Calcul du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine

13.3.1 Calcul du coefficient directeur

Propriété 37.

La valeur du **coefficient directeur** d'une fonction affine f est égale au **quotient** de la différence de deux images par la différence des deux antécédents correspondants.

Exemple :

Soit g une fonction affine dont on ne connaît pas l'expression mais dont on connaît quelques valeurs (par exemple sous forme de tableau) :

x	2	5	-4
$g(x)$	-2	-17	28

La propriété précédente nous dit que l'on peut calculer le coefficient directeur a de la fonction g en calculant :

- la différence de deux images (n'importe lesquels) : $g(5) - g(2) = -17 - (-2) = -15$

- la différence des antécédents correspondants : $5 - 2 = 3$

- le quotient de ces deux dernières valeurs : $\dfrac{g(5) - g(2)}{5 - 2} = \dfrac{-15}{3} = \boxed{-5}$

Le coefficient directeur de g est donc -5, ce qui veut dire que l'expression de g est de la forme $g(x) = -5x + b$. Reste à trouver la valeur de l'ordonnée à l'origine b.

Remarques :

Dans ce dernier exemple, pour calculer le coefficient directeur j'ai choisis d'utiliser les antécédents 2 et 5. Était-ce la seule possibilité ? Non, on aurait tout aussi bien pu choisir deux autres nombres et l'on aurait évidemment trouvé après calculs la même valeur -5. La preuve, en choisissant par exemple les antécédents -4 et 5 :

$$\frac{g(5) - g(-4)}{5 - (-4)} = \frac{-17 - 28}{5 + 4} = \frac{-45}{9} = \boxed{-5}$$

13.3.2 Calcul de l'ordonnée à l'origine

Propriété 38.

Si l'on connaît le coefficient directeur a ainsi que la valeur de la fonction f en un point u (par exemple $f(u) = v$) alors on peut calculer l'ordonnée à l'origine b en résolvant l'équation $f(u) = au + b = v$.

Exemple :

Reprenons la fonction g de l'exemple précédent. On avait trouvé $g(x) = -5x + b$, on connaît donc le coefficient directeur $a = -5$ et on connaît aussi la valeur de g en un point (même trois en fait), par exemple $g(-4) = 28$.
Pour trouver l'ordonnée à l'origine b il faut donc résoudre l'équation suivante :

$$\begin{aligned} g(-4) = -5 \times (-4) + b &= 28 \\ +20 + b &= 28 \\ b &= 28 - 20 \\ b &= 8 \end{aligned}$$

Finalement l'expression de la fonction affine g est $\boxed{g(x) = -5x + 8}$.

13.4 Représentations graphiques

13.4.1 Graphique à partir d'une expression

Propriété 39.

Une fonction est **affine** si et seulement si sa courbe représentative est une **droite**.
Une fonction est **linéaire** si et seulement si sa courbe représentative est une **droite passant par l'origine**.

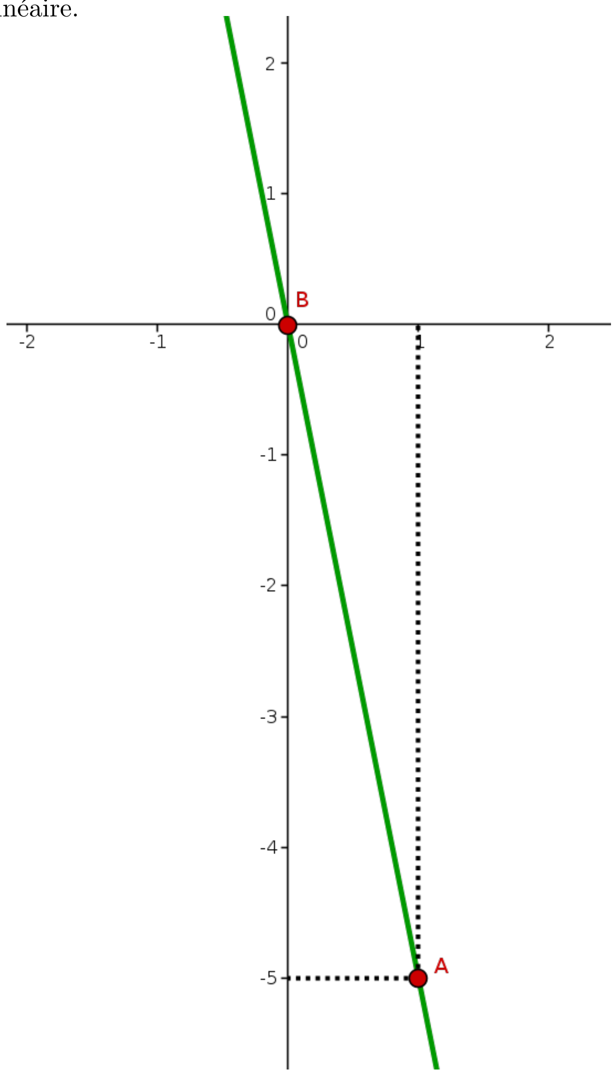
Remarques :

1) Les fonctions linéaires caractérisent donc des situations de proportionnalité où les points sont alignés avec l'origine (caractérisation vue en classe de 5ème).

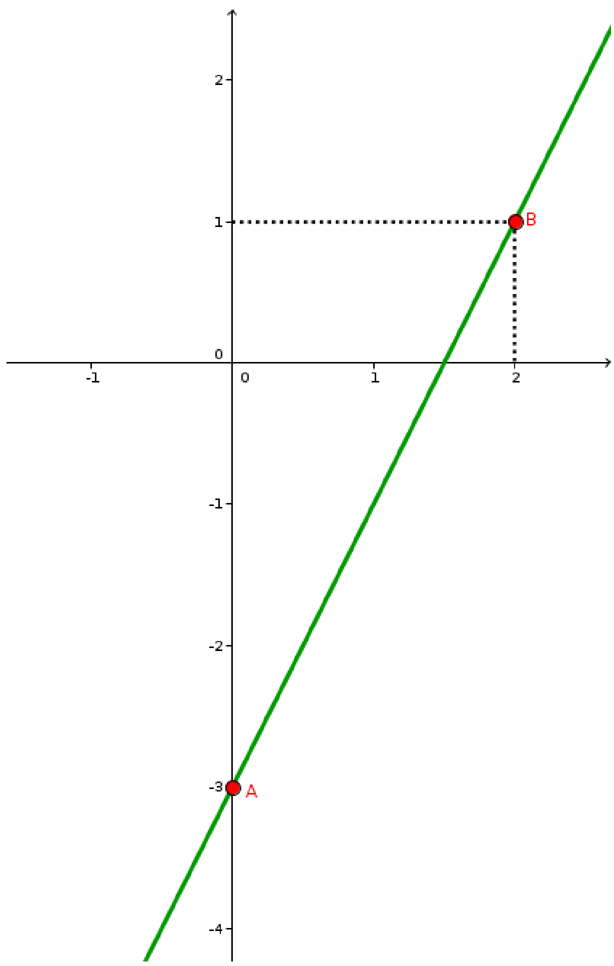
2) Puisque les courbes représentatives des fonctions affines et linéaires sont des droites il suffit alors d'avoir deux couples de points (*antécédents ; images*) dans un repère pour tracer la droite correspondant à l'une de ces fonctions.

Exemples :

Soit f une fonction linéaire définie par l'expression $f(x) = -5x$. On a par exemple $f(1) = -5 \times 1 = -5$. L'image de 1 par la fonction f est -5. La courbe représentative de f passe donc par le point $A(1; -5)$ et aussi par l'origine $(0; 0)$ puisque c'est une fonction linéaire.



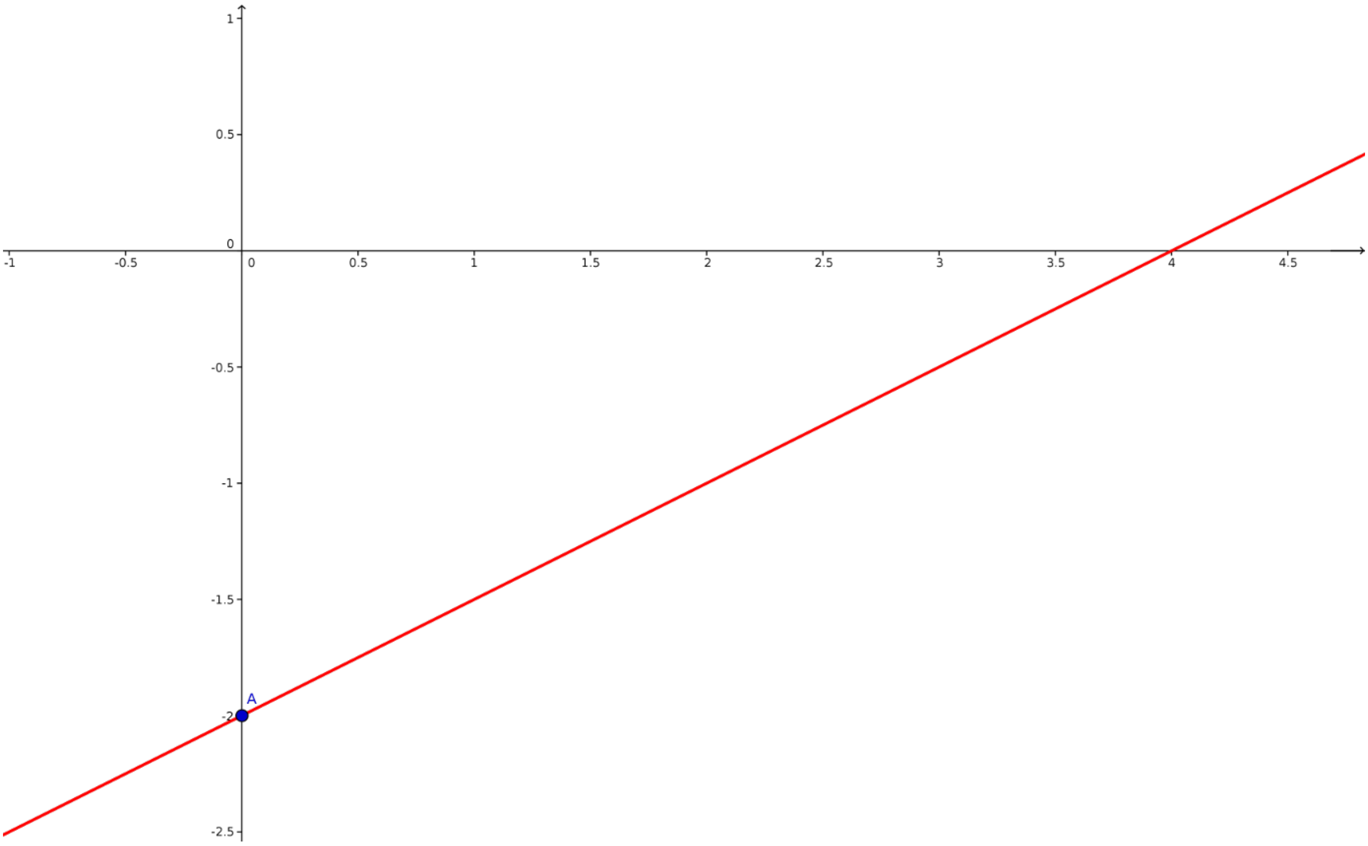
Soit g la fonction affine dont l'expression est :
$g(x) = 2x - 3$. On calcule par exemple :
$g(0) = 2 \times 0 - 3 = -3$ et $g(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$
la droite représentant g passe donc par le point $A(0; -3)$ et le point $B(2; 1)$



13.4.2 Expression à partir d'un graphique

On peut tout à fait retrouver l'expression d'une fonction affine ou linéaire en observant son graphique. Pour cela il existe au moins deux méthodes mais nous ne parlerons que d'une seule ici (l'autre sera vue dans le chapitre système d'équations).

Tâchons retrouver l'expression d'une fonction affine dont le graphe est le suivant :

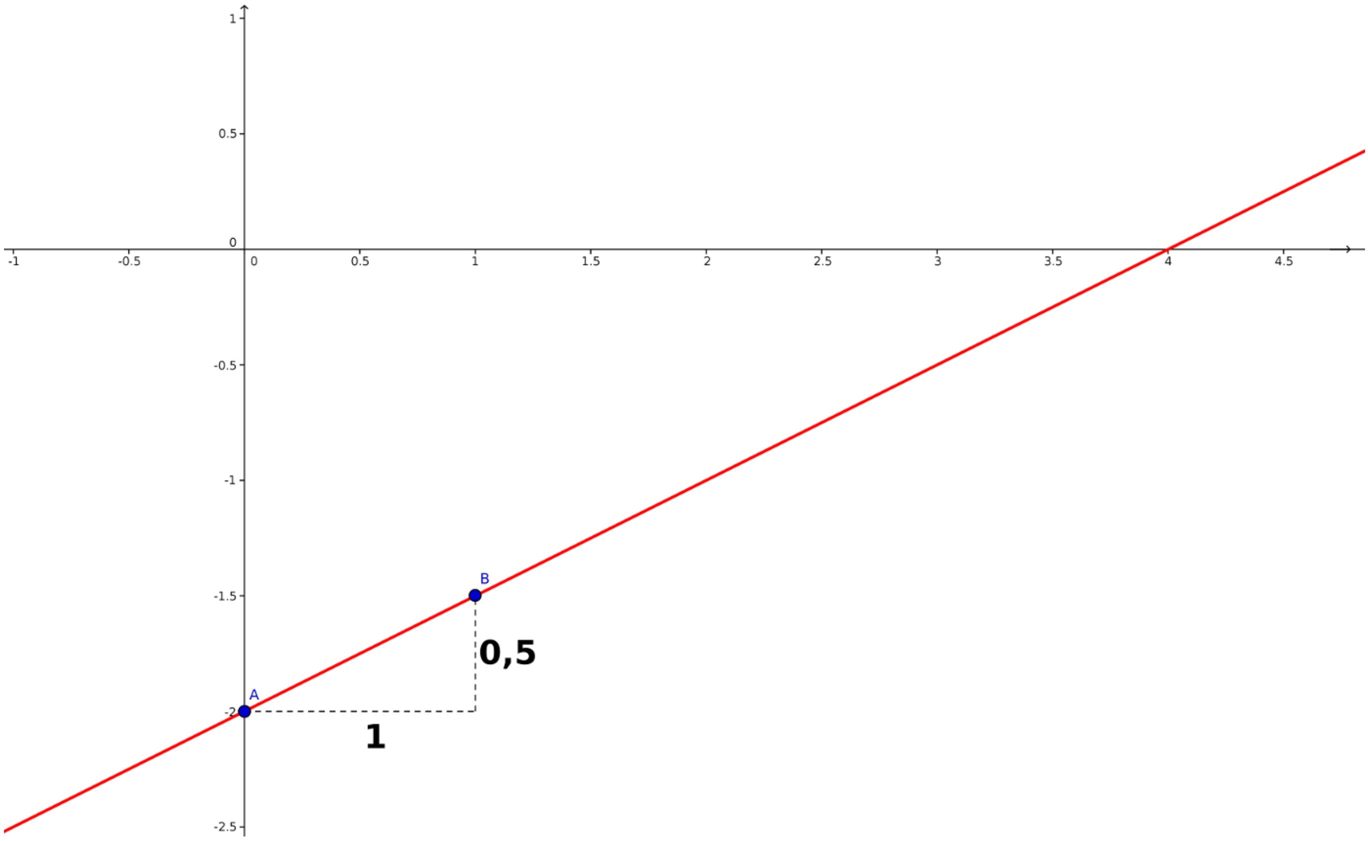


Propriété 40.

Comme son nom l'indique, l'**ordonnée à l'origine** d'une fonction affine f correspond à l'ordonnée à laquelle la droite représentative de f possède la même abscisse que l'origine. Autrement dit, c'est l'ordonnée du point d'intersection entre la droite représentative de f avec l'axe des ordonnées.

Exemple :

Dans le graphique précédent la droite représentative de f (en rouge) coupe l'axe des ordonnées en un point A qui a pour ordonnée -2. L'expression de f est donc du type $f(x) = ax - 2$. Reste à trouver le coefficient directeur a de f.



Comment faire pour déterminer le coefficient directeur de f ? C'est en réalité très simple, il suffit de remarque que la droite représentative de f passe par les points $A(0;-2)$ et $B(1;-1,5)$. On a donc $f(0) = -2$ et $f(1) = -1,5$.
Il ne reste plus qu'à calculer le coefficient directeur de la même manière que dans la partie 3 de ce chapitre. Le coefficient directeur a de cette fonction f vaut donc :

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{-1,5-(-2)}{1} = \boxed{0,5}$$

L'expression de f est donc $f(x) = 0,5x - 2$.

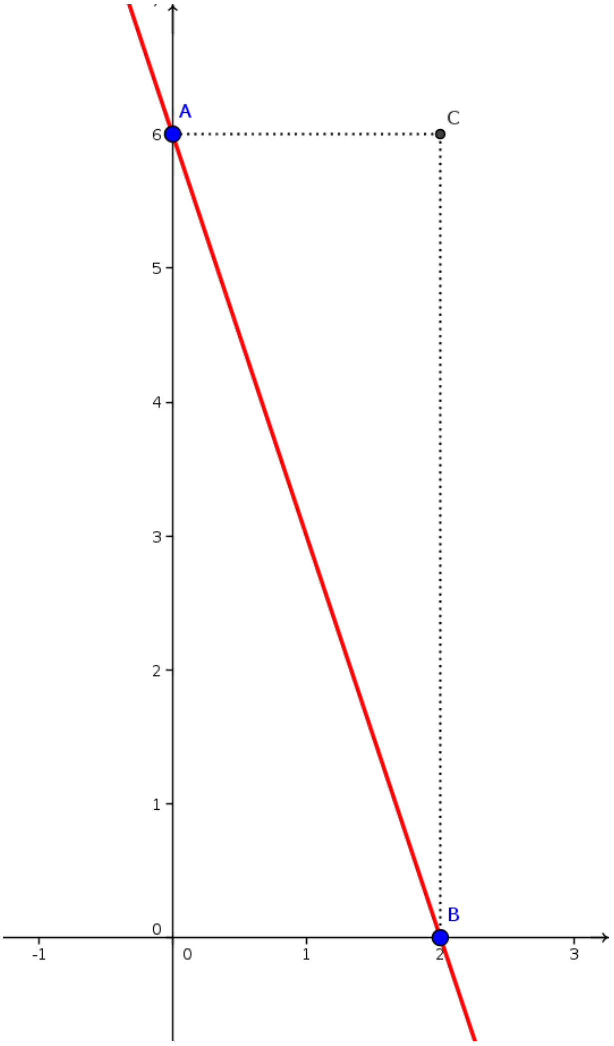
Remarques :

1) On peut aussi trouver directement et sans calcul le coefficient directeur d'une fonction affine en observant la position de deux points sur la droite. Dans la figure ci-dessus, pour aller du point A au point B on avance horizontalement de 1 unité et on monte verticalement de 1/2 unité. Le coefficient directeur est aussi le quotient de ces deux quantités : $a = \frac{1/2}{1} = 0,5$.

2) Si la droite *monte* (est croissante) alors le coefficient directeur est positif mais si la droite *descend* (est décroissante) alors le coefficient directeur est négatif.

Un dernier exemple :

Soit g une fonction affine dont le graphique est représenté ci-dessous. Quelle est l'expression de g ?



La droite représentative de g (en rouge) coupe l'axe des ordonnées en un point A d'ordonnée 6. L'expression de g est donc du type $g(x) = ax + 6$. Cherchons le coefficient directeur a de g :

Remarquons que la droite *descend* (est décroissante), le coefficient directeur doit donc être négatif !
À l'aide du point A et du point B on a : $g(0) = 6$ et $g(2) = 0$.
Donc le calcul du coefficient directeur s'obtient par

$$a = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{0 - 6}{2} = -3$$

L'expression de la fonction g est donc : $g(x) = -3x + 6$.

Chapitre 14

Angles et polygones

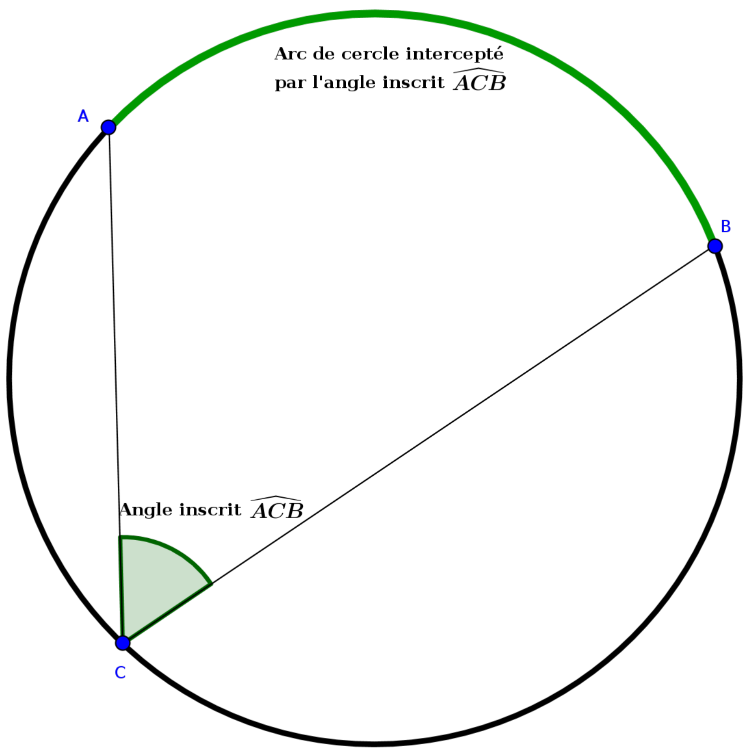
14.1 Angles inscrits et angles au centre

Définition 36 (angle inscrit)**.**

Soit A, B et C trois points d'un cercle $\mathcal{C}$. On dit que l'angle $\widehat{ACB}$ est **inscrit dans** le cercle $\mathcal{C}$.

De plus, on dit que l'arc de cercle ne contenant pas C et délimité par A et B est l'**arc de cercle intercepté par** l'angle inscrit $\widehat{ACB}$.

Exemple :

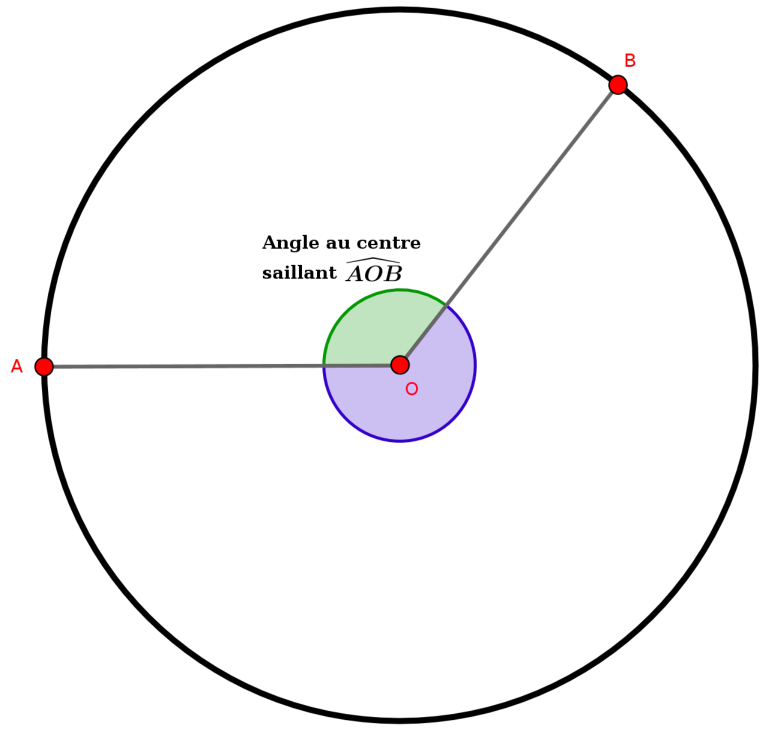


Remarque : L'arc de cercle en vert est noté $\overset{\frown}{AB}$ on dit aussi que c'est le petit arc de cercle ou encore l'arc de cercle aigu.

Définition 37 (angle au centre)**.**

Soit A et B deux points d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. L'angle saillant $\widehat{AOB}$ (et aussi l'angle rentrant $\overparen{\mathrm{AOB}}$) est appelé **angle au centre**.

Exemple :



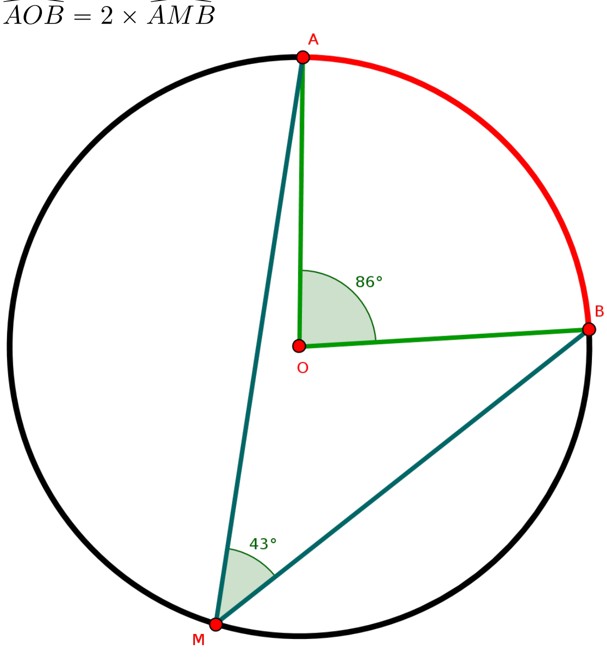
Remarque : Le sommet de l'angle est le centre du cercle, d'où le nom *angle au centre*.

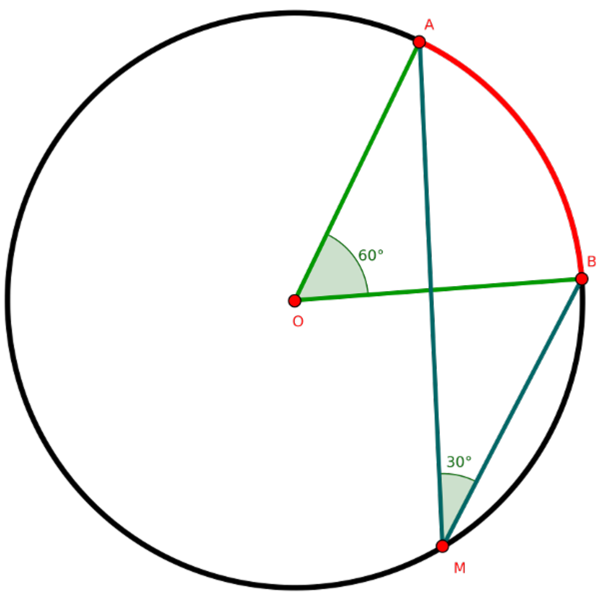
Propriété 41 (angle au centre)**.**

Dans un cercle, un angle au centre mesure le double d'un angle inscrit interceptant le même arc.

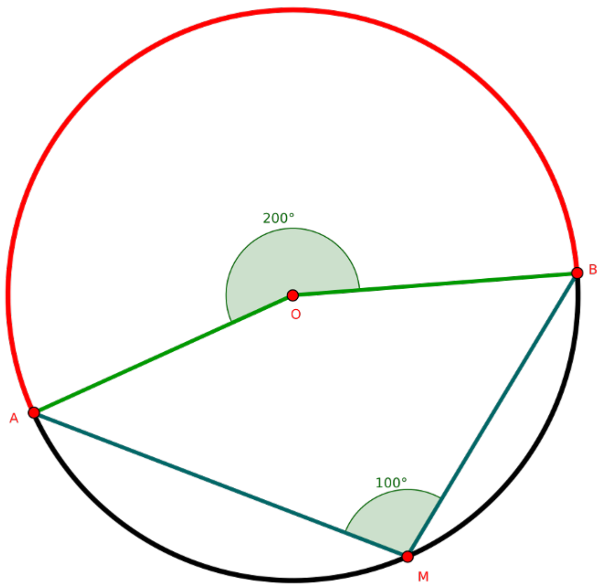
Exemples : Avec angles au centre saillants

Les angles angles au centre $\widehat{AOB}$ et les angles inscrits $\widehat{AMB}$ interceptent le même arc $\widehat{AB}$ en rouge. On a donc $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}$





Exemple : Avec un angle au centre rentrant



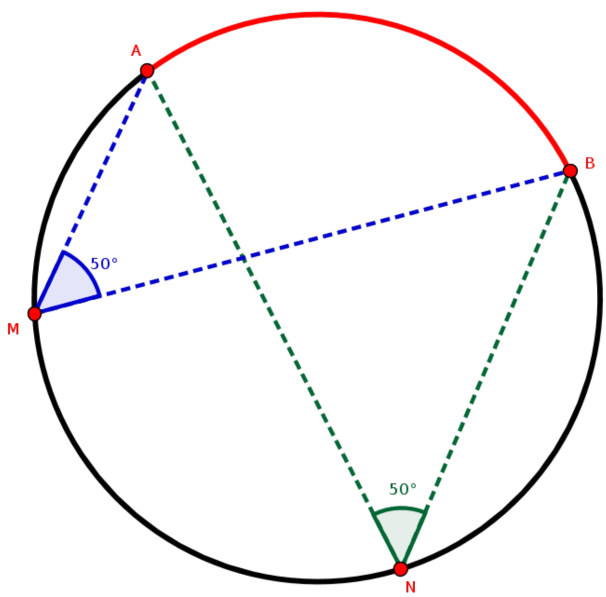
L'angle au centre $\widehat{AOB}$ et l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$ en rouge.
On a donc $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}$

Propriété 42 (angle inscrit)**.**

Dans un cercle, deux angles inscrits interceptant le même arc de cercle ont la même mesure.

Remarque : C'est évident puisque deux angles inscrits interceptant le même arc de cercle mesurent chacun la moitié de l'angle au centre correspondant.

Exemple :



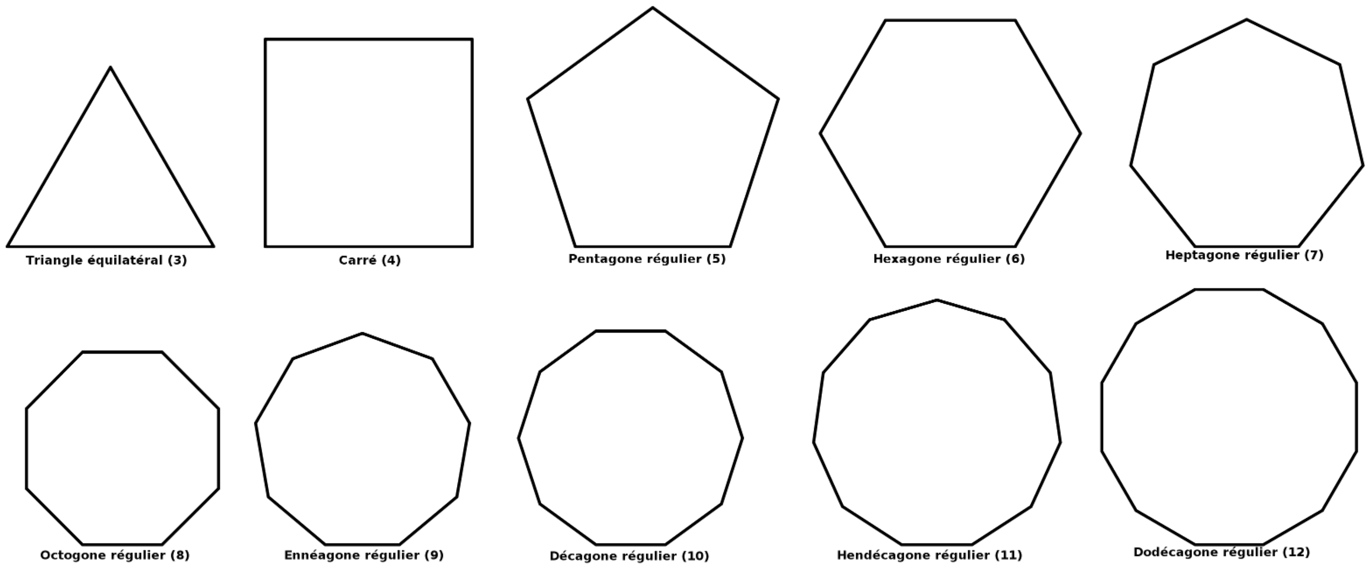
Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ (en rouge).
Ils ont donc la même mesure : $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.

14.2 Polygones réguliers

Définition 38 (polygones réguliers)**.**

On dit qu'un polygone est **régulier** si tous ses côtés ont la même longueur et tous ses angles ont la même mesure.

Exemples :

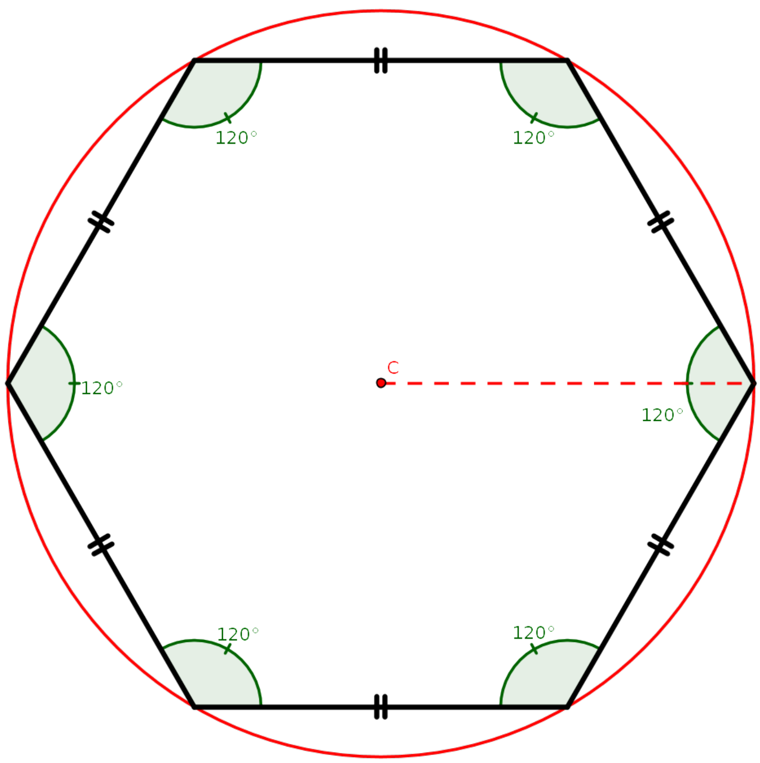


Propriété 43.

Les sommets d'un polygone régulier sont cocycliques : ils sont tous sur un même cercle.

Remarque : On désigne aussi le centre de ce cercle comme étant le centre du polygone.

Exemple :

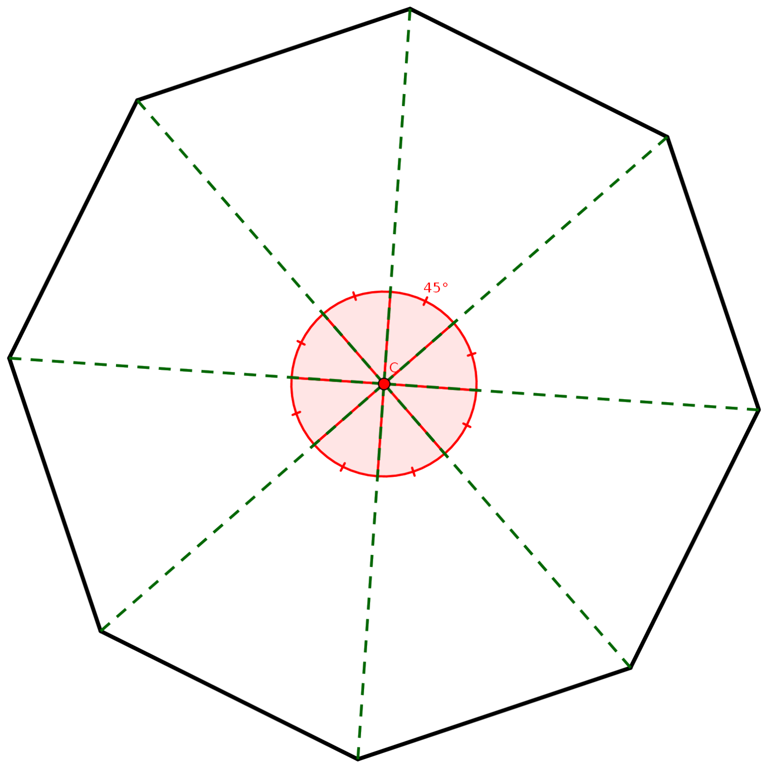


Propriété 44.

Dans un polygone régulier à n côtés chaque angle au centre déterminé par deux côtés consécutifs à une mesure égale à $\dfrac{360°}{n}$.

Remarque : C'est assez évident, l'angle plein étant partagé en n angles de même mesure.

Exemple : Avec l'octogone régulier (8 côtés) les angles au centre mesurent tous $\dfrac{360°}{8} = 45°$.

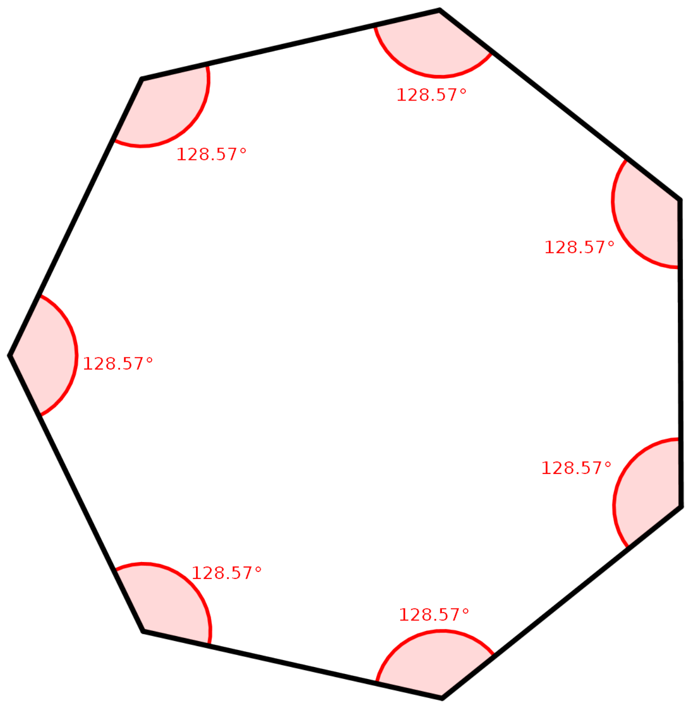


Remarque : Grâce aux deux dernières propriétés on peut maintenant, avec un rapporteur, tracer n'importe quel polygone régulier dans un cercle donné : il suffit de tracer les angles au centre en fonction du nombre de côtés.

Propriété 45.

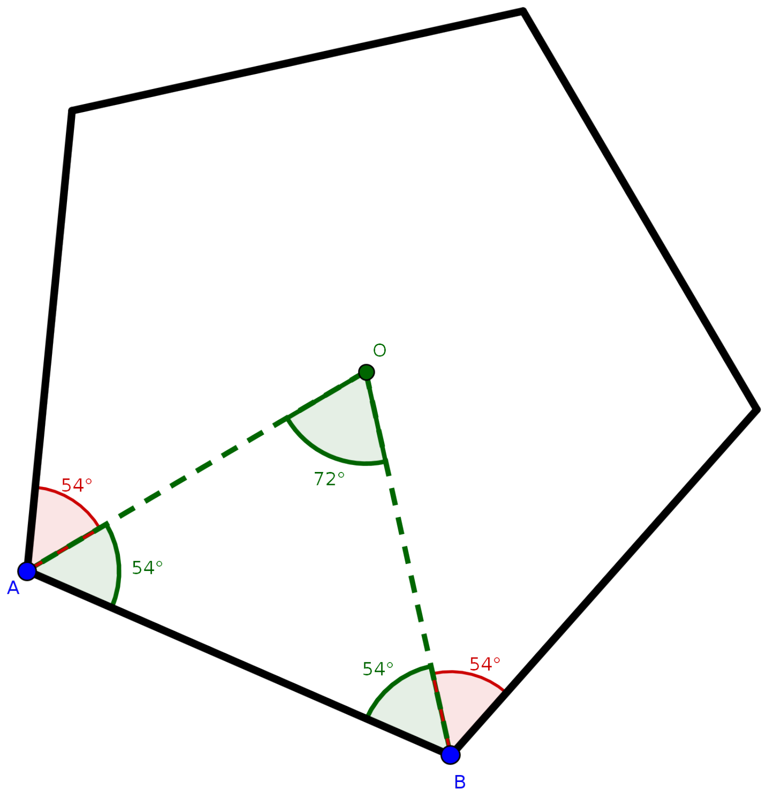
La mesure d'un angle formé par deux côtés consécutifs dans un polygone régulier à n côtés est égale à $180° - \dfrac{360°}{n}$.

Exemple : Avec un heptagone régulier (7 côtés), la mesure d'un angle entre deux côtés consécutifs est de : $180° - \dfrac{360°}{7} \simeq 128,57°$



Cette dernière propriété mérite quand même quelques explications :
Soit $\mathcal{P}$ un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de centre O et ayant pour côté un segment [AB]. Dans ces condition AOB est isocèle en O et et l'angle $\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{n}$ (propriété 44). Or on sait que dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180° et si de plus ce triangle est isocèle alors les angles à la base ont la même mesure.
Donc $\widehat{OAB} + \widehat{OBA} = 180° - \dfrac{360°}{n}$

Cela donne avec, par exemple, le pentagone régulier ($n = 5$) : $\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{5} = 72°$ et un angle entre deux côtés consécutifs vaut $180° - \dfrac{360°}{5} = 108°$.



Chapitre 15

Systèmes d'équations

15.1 Équation linéaire à deux inconnues

Définition 39 (Équation linéaire à deux inconnues)**.**

Une équation linéaire à deux inconnues est une équation du type $ax + by = c$ où a, b et c sont des nombres et x et y sont les inconnues.

Exemples :

Avec $a = 5$, $b = -3$ et $c = 8,5$: on obtient $5x - 3y = 8,5$.
Avec $a = -2$, $b = 0$ et $c = 3$: on obtient $-2x = 3$.

Plus concrètement : le C.D.I. achète x exemplaires d'un manuel de mathématiques à 23 € l'unité et y exemplaires d'un manuel de français à 27,50 € l'unité. Le total du prix des manuels est de 1 345 €.
Cette situation peut s'écrire mathématiquement : $23x + 27,50y = 1\,345$.

Définition 40 (Couple solution)**.**

On dit qu'un couple de nombres $(u; v)$ est solution d'une équation linéaire à deux inconnues $ax + by = c$ si on a bien l'égalité $au + bv = c$.

Exemples :

Soit l'équation $-7x + 5y = 1$.
Le couple $(2; 3)$ est solution. En effet : en remplaçant $(x; y)$ par $(2; 3)$ on obtient : $-7 \times 2 + 5 \times 3 = -14 + 15 = 1$.
Le couple $(3; 4)$ n'est pas solution car $-7 \times 3 + 5 \times 4 = -21 + 20 = -1 \neq 1$.
Le couple $(-3; -4)$ est solution car $-7 \times (-3) + 5 \times (-4) = 21 - 20 = 1$.

15.2 Représentation graphique des solutions d'une équation linéaire à deux inconnues

Propriété 46.

On peut représenter graphiquement tous les couples solutions possibles d'une équation linéaire $ax + by = c$, avec a, b, c non tous nuls. Pour cela, il suffit de tracer la fonction affine $y = f(x) = \dfrac{-ax + c}{b}$ si $b \neq 0$ ou la fonction affine $x = \dfrac{c}{a}$ (droite vecticale) si $b = 0$.

Remarque :

Cette propriété peut paraître complexe lors d'une première lecture et il est vrai qu'il y a beaucoup de choses à en dire. Le mieux étant de voir directement de quoi il retourne dans la pratique avec des exemples :

Exemples :

1) Soit, par exemple, l'équation linéaire à deux inconnues suivante : $-4x+2y=-8$. Nous savons qu'elle est équivalente à l'équation : $2y=4x-8$. En effet :

$$-4x+2y=-8$$

$$+4x \qquad\qquad +4x$$

$$\underbrace{+4x-4x}_{0}+2y=+4x-8$$

$$2y=4x-8$$

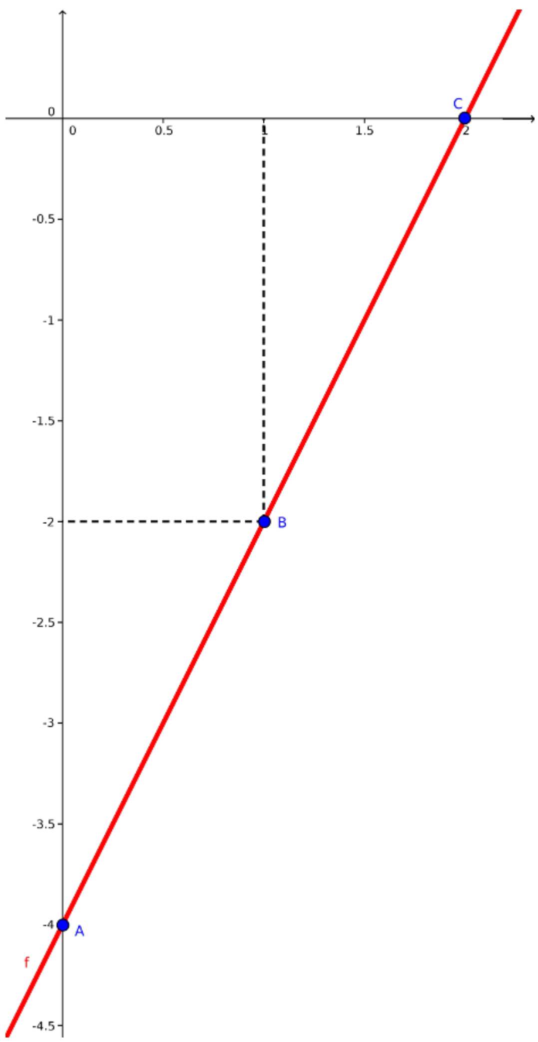
Puis, en divisant par 2, cette dernière équation est elle même équivalente à :

$$2y=4x-8$$

$$\div 2 \qquad\qquad \div 2$$

$$\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}}=\frac{4x-8}{2}$$

$$y=2x-4$$



Pourquoi transformer l'équation de départ en cette dernière équation ?

Nous allons maintenant considérer chaque couple solution $(x;y)$ de cette équation comme s'il s'agissait des points (*abscisse ;ordonnée*) du graphique d'une fonction, en posant $y=f(x)$. On trace alors le graphe de $f(x)=2x-4$ comme dans le chapitre *fonctions affines et linéaires* :

$f(0)=2\times 0-4=-4$, donc le graphe passe par le point $A(0;-4)$

$f(1)=2\times 1-4=-2$, donc le graphe passe par le point $B(1;-2)$

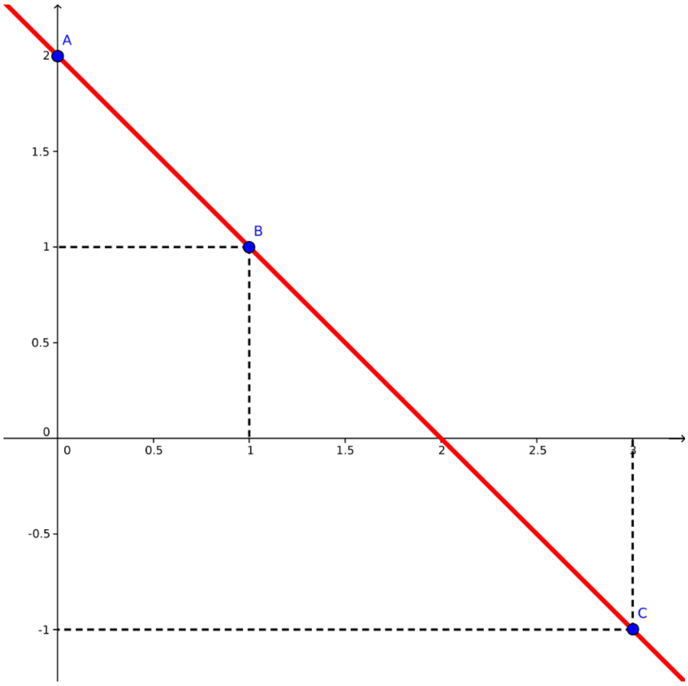
On peut prendre n'importe quel point $C(x;y)$ du graphique, les valeurs du couple $(x;y)$ sont des solutions de l'équation de départ.

Par exemple, le point $C(2;0)$ est un point du graphe de f. $(2;0)$ est donc une solution de l'équation de départ :

$$-4x+2y=-8$$

En effet, si on remplace x par 2 et y par 0, on obtient bien : $-4x+2y=-4\times 2+2\times 0=-8$

2) Soit l'équation linéaire à deux inconnues suivante : $x + y = 2$.



Cette équation est équivalente à $y = -x + 2$. On considère alors la fonction affine $g(x) = -x + 2$, dont le graphe est tracé ci-contre.

La droite représentant la fonction affine g passe par les points $A(0; 2)$ et $B(1; 1)$.

Tout point $C(x; y)$ de cette droite représente une solution de l'équation initiale : $x + y = 2$.

Par exemple $C(3; -1)$ est un point de la droite donc le couple $(3; -1)$ est une solution de l'équation initiale. En effet, $3 + (-1) = 2$.

15.3 Système linéaire de deux équations à deux inconnues

15.3.1 Défintion

Définition 41 (Système linéaire et solution)**.**

On appelle **système de deux équations linéaires à deux inconnues** un ensemble de deux équations linéaires ayant les mêmes inconnues et que l'on écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & c \\ dx + ey & = & f \end{array} \right.$$

Résoudre un tel système c'est trouver tous les couples $(x; y)$ qui sont à la fois solution de la première et de la seconde équation linéaire.

Exemples :

1) On considère le système suivant : $\left\{ \begin{array}{rcl} -4x + 2y & = & -8 \\ x + y & = & 2 \end{array} \right.$,

où l'on a en fait $a = -4$, $b = 2$, $c = -8$, $d = 1$, $e = 1$ et $f = 2$.
On cherche donc un couple de nombres $(x; y)$ qui soit à la fois une solution de la première et de la seconde équation.
En fait il existe une seule solution (nous verrons pourquoi dans le prochain paragraphe), le couple $(2; 0)$.
En effet, en remplaçant x par 2 et y par 0 dans la première équation on obtient bien : $-4 \times 2 + 2 \times 0 = -8$, et dans la seconde équation : $2 + 0 = 2$.

2) On considère le système suivant : $\left\{ \begin{array}{rcl} 5x - 3y & = & 4 \\ 10x - 6y & = & 8 \end{array} \right.$,

où l'on a en fait $a = 5$, $b = -3$, $c = 4$, $d = 10$, $e = -6$ et $f = 8$.
Le couple $(2; 2)$ est une solution du système puisque l'on a pour la première équation $5 \times 2 - 3 \times 2 = 10 - 6 = 4$ et pour la seconde $10 \times 2 - 6 \times 2 = 20 - 12 = 8$. Mais ça n'est pas le seul couple solution, $(8; 12)$ est aussi une solution puisque $5 \times 8 - 3 \times 12 = 40 - 36 = 4$ et $10 \times 8 - 6 \times 12 = 80 - 72 = 8$. En fait, pour ce système il y a une infinité de solutions (nous verrons aussi pourquoi au prochain paragraphe).

3) Un exemple plus concret : 10 amis vont au restaurant, le gérant du restaurant leut fait savoir que si 8 d'entre-eux prennent le menu A et 2 d'entre-eux prennent le menu B alors ils payeront au total 185 €. Par contre, si 4 d'entre-eux prennent le menu A et 6 le menu B alors ils payeront au total 165 €. Quels sont les prix des menus A et B ?
Posons x le prix du menu A et y le prix du menu B. Le prix payé dans la première situation (8 menus A et 2 menus B) en fonction de x est alors $8x + 2y = 185$. Dans la seconde situation (4 menus A et 6 menus B) on a $4x + 6y = 165$. Nous sommes donc amenés à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 8x + 2y & = & 185 \\ 4x + 6y & = & 165 \end{array} \right.$$

Nous pouvons vérifier que $(19,5\,;\,14,5)$ est un couple solution (c'est même le seul possible), en effet :
$8 \times 19,5 + 2 \times 14,5 = 185$ et $4 \times 19,5 + 6 \times 14,5 = 165$. Le prix du menu A est donc de 19,50 €et celui du menu B est de 14,50 €.

La seule question qui demeure est : **comment fait-on pour trouver ces couples solutions ?** Il y a au moins trois méthodes développées dans les paragraphes suivants :

15.3.2 Résolution graphique

Propriété 47.

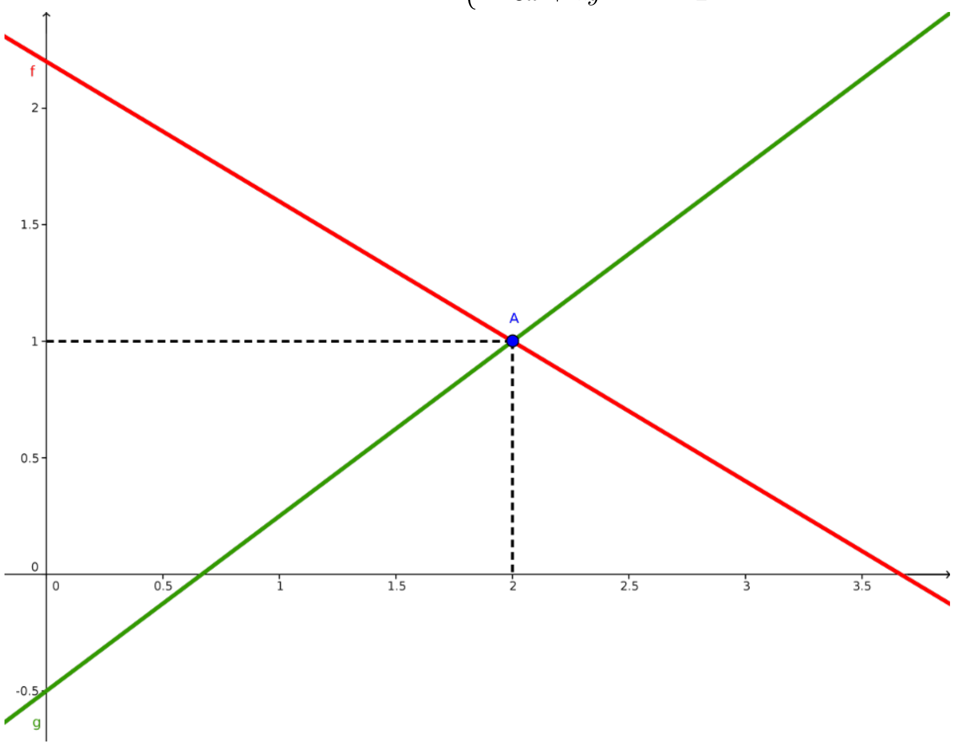
On peut résoudre graphiquement un système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & c \\ dx + ey & = & f \end{array} \right.$$

Pour cela il suffit de tracer les droites représentant chacune des équations, puis on regarde les points communs entre ces droites.
Trois cas sont possibles :
- Les droites sont sécantes : 1 point d'intersection, donc une unique solution au système.
- Les droites sont confondues : une infinité de points communs, donc une infinité de solutions au système.
- Les droites sont parallèles : pas de point commun, le système n'a donc pas de solution.

Exemples :

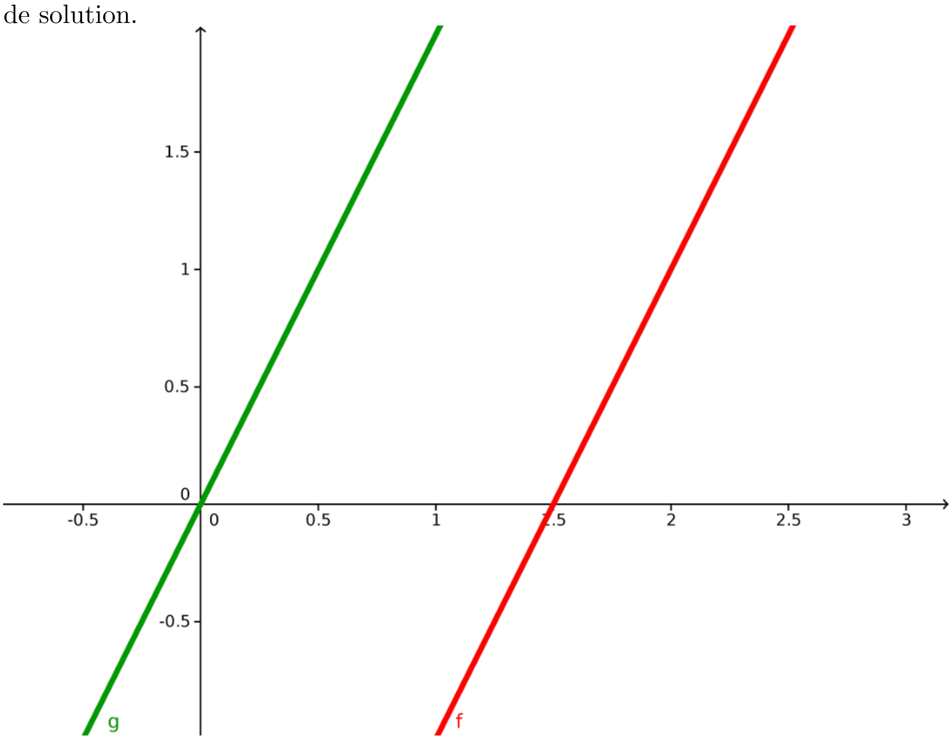
1) On considère le système suivant : $\left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 5y & = & 11 \\ -3x + 4y & = & -2 \end{array} \right.$



La première équation est équivalente à $y = \dfrac{-3x + 11}{5} = -0,6x + 2,2$. On a tracer en rouge la fonction $f(x) = -0,6x + 2,2$ et la seconde équation est équivalente à $y = \dfrac{3x - 2}{4} = 0,75x - 0,5$. On a tracer en vert la fonction $g(x) = 0,75x - 0,5$. Les deux droites se coupent en un unique point $A(2;1)$, il y a donc une seule solution au système : $x = 2$ et $y = 1$.

2) On considère le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} 4x-2y & = & 6 \\ 2x-y & = & 0 \end{array}\right.$

La première équation est équivalente à $y = \dfrac{4x-6}{2} = 2x-3$. La seconde équation est elle équivalente à $y = 2x$. En traçant les fonctions affines correspondantes on s'aperçoit vite qu'elles semblent parallèles (et c'est bien le cas puisqu'elles ont le même coefficient directeur : 2 !). Il n'y a donc aucun point d'intersection, le système n'a donc pas de solution.



15.3.3 Résolution par le calcul

La méthode précédente est intéressante puisqu'elle permet de résoudre visuellement un système mais elle a un gros inconvénient : elle n'est pas du tout précise. En effet, trouver un point d'intersection dont l'abscisse peut avoir de nombreuses décimales n'est pas évident... Voici deux variantes d'une méthode calculatoire :

Méthode de combinaison

Propriété 48.

1) On ne change pas les solutions d'un système linéaire lorsque l'on multiplie on divise chaque membre d'une des équations par un même nombre non nul.

2) On peut ajouter ou soustraire membre à membre deux équations d'un même système linéaire sans changer les solutions du système.

Exemples :

Considérons le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcll} 4x-2y & = & 6 & (L1) \\ 2x-5y & = & -7 & (L2) \end{array}\right.$ où l'on a appelé $L1$ la première équation et $L2$ la seconde.

Le **1)** de la propriété dit que l'on peut remplacer, par exemple, $L2$ par un multiple de $L2$. Par exemple, remplacer $L2$ par $2 \times L2$ (on notera : $2 \times L2 \to L2$), on obtient :

$$2 \times L2 \quad : \quad 4x - 10y = -14$$

Le système devient alors :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 4x-2y & = & 6 & (L1) \\ 4x-10y & = & -14 & (L2) \end{array}\right.$$

Pourquoi faire une telle manipulation ? Parce que maintenant, en se servant du **2)**, on va pouvoir supprimer une inconnue. En effet, la seconde partie de la propriété nous dit que l'on peut soustraire membre à membre les deux équations du système, par exemple en faisant $L1 - L2$, on obtient pour le membre de gauche :

$$4x - 2y - (4x - 10y) = 4x - 2y - 4x + 10y = 8y$$

Étant donné qu'il y avait le même nombre d'x dans les deux équations, la soustraction à permis de les supprimer.

Pour le membre de droite on obtient tout simplement :

$$6 - (-14) = 6 + 14 = 20$$

On a donc finalement :

$$8y = 20$$

soit :

$$y = \frac{20}{8} = 2,5$$

Reste à trouver la valeur de x correspondant. Pour cela c'est très simple, on remplace la valeur de y trouvée dans l'une des deux équations, par exemple, si l'on remplace y par $2,5$ dans le première équation, on obtient :

$$4x - 2y = 6$$

$$4x - 2 \times 2,5 = 6$$

Soit :

$$4x - 5 = 6$$

ou encore

$$4x = 6 + 5 = 11$$

Donc :

$$x = \frac{11}{4} = 2,75$$

Nous avons finallement trouvé le couple solution du système : $(2,75\ ;\ 2,5)$

Un second exemple :
Problème : chez le fleuriste, si j'achète 5 roses et 7 tulipes je payerai 47 €; si j'achète 6 roses et 6 tulipes je payerai 48 €. Quel est le prix d'une rose ? D'une tulipe ?

Résolution : on pose x le prix d'une rose et y celui d'une tulipe. D'après l'énoncé nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} 5x + 7y = 47 & (L1) \\ 6x + 6y = 48 & (L2) \end{cases}$$

Il est difficile de muliplier la première équation pour obtenir le même nombre d'x que dans la seconde et réciproquement... Nous allons cette fois-ci multiplier $L1$ par 6 et multiplier $L2$ par 5, nous aurons alors $30x$ pour les deux équations :

$$6 \times L1 \rightarrow L1 : \quad 30x + 42y = 282$$

$$5 \times L2 \rightarrow L2 : \quad 30x + 30y = 240$$

On a maintenant le système :

$$\begin{cases} 30x + 42y = 282 & (L1) \\ 30x + 30y = 240 & (L2) \end{cases}$$

Maintenant on fait $L1 - L2$: $\quad 30x + 42y - (30x + 30y) = 282 - 240$

Soit : $12y = 42$

Donc : $y = \dfrac{42}{12} = 3,5$

Ensuite, toujours comme dans le premier exemple, on remplace y par $3,5$ dans l'une des deux équations de départ : Par exemple dans la première : $5x + 7y = 47$, on obtient :

$$5x + 7 \times 3,5 = 47$$

$$5x + 24,5 = 47$$

$$5x = 22,5$$

$$x = \frac{22,5}{5} = 4,5$$

Une rose coûte donc 4,50 € et une tulipe 3,50 €.

Méthode de substitution

Cette dernière méthode consiste à exprimer une inconnue en fonction de l'autre pour ensuite l'injecter dans une équation. Concrètement on applique plusieurs étapes :
1) On isole une inconnue (on l'exprime en fonction de l'autre)
2) On remplace l'expression trouvée dans l'autre équation
3) On obtient alors une équation avec une seule inconnue que l'on résout.
4) On trouve la valeur de l'autre inconnue comme dans la méthode par combinaison.

Exemple :

On considère le système suivant $\left\{\begin{array}{rcl} 4x-2y & = & 6 \\ 3x-y & = & 5 \end{array}\right.$

1) On isole y dans la seconde équation (c'est plus simple) : $3x - y = 5$ devient $y = 3x - 5$.

2) On remplace dans l'autre équation (la première) y par l'expression que l'on a trouvé dans 1). La première équation $4x - 2y = 6$ devient alors $4x - 2(3x - 5) = 6$.

3) Nous avons maintenant une équation assez simple, avec une seule inconnue : x. On la résout :

$$4x - 2(3x - 5) = 6$$

On distribue tout d'abord -2 à l'intérieur des parenthèses :

$$4x - 6x + 10 = 6$$
$$-2x + 10 = 6$$
$$-2x = 6 - 10$$
$$x = \frac{-4}{-2} = 2$$

4) On remplace x par 2, par exemple dans la seconde équation :

$$3x - y = 5$$
$$3x - (-2) = 5$$
$$3x = 3$$
$$x = 1$$

Un couple solution de ce système est donc $(1; 2)$

Chapitre 16

Annexe A : Q.C.M. de révisions début d'année

16.1 Sujets des Q.C.M.

16.1.1 Q.C.M. 1 : Fraction, inverse et priorité

Proposition		A	B	C
1	Le résultat de $\dfrac{14}{6} \times \dfrac{2}{7}$ est	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{28}{42}$	$0,6666667$
2	L'inverse de $\dfrac{15}{12}$ est	$\dfrac{-15}{-12}$	$-\dfrac{5}{4}$	$0,8$
3	Le résultat de $\frac{14}{6} + \frac{10}{6}$ est	4	$\dfrac{24}{12}$	$\dfrac{2}{3}$
4	Le résultat de $12 \div \dfrac{2}{3}$ est	$\dfrac{6}{4}$	2	18
5	Le résultat de $-3 + \dfrac{4}{5}$ est	$\dfrac{1}{5}$	$-2,2$	$\dfrac{-7}{5}$
6	Le résultat de $\dfrac{15}{12} \div 3$ est	$\dfrac{15}{4}$	$\dfrac{5}{12}$	$\dfrac{5}{4}$
7	Le résultat de $\dfrac{7}{6} - \dfrac{2}{9}$ est	$\dfrac{17}{18}$	$\frac{5}{-3}$	$\dfrac{5}{9}$
8	Le résultat de $\dfrac{-10}{8} \div \dfrac{3}{4}$ est	$\dfrac{-3,33}{2}$	$\dfrac{24}{-40}$	$\dfrac{-5}{3}$
9	Le résultat de $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4}$ est	1	$\dfrac{9}{20}$	$\dfrac{21}{24}$
10	Le résultat de $\dfrac{\frac{14}{6} + \frac{2}{7}}{\frac{14}{6} - \frac{2}{7}}$ est	$\dfrac{16}{12}$	$\dfrac{55}{43}$	2

16.1.2 Q.C.M. 2 : Signe, produit, opposé

	Proposition	A	B	C
1	Le résultat de $(-2) \times (-3) \times (-4)$ est	-12	24	-24
2	Le résultat de $(-2) + (-3) + (-4)$ est	0	9	-9
3	Le résultat de $(-2) - (-3 + 4)$ est	-3	-1	3
4	Le résultat de $-5 - (-3 + (5 - 6))$ est	-3	-1	3
5	Le résultat de $-13 + 18$ est	-5	5	-31
6	L'opposé de $\dfrac{-17}{5}$ est	$\dfrac{5}{-17}$	$\dfrac{17}{5}$	$\dfrac{17}{-5}$
7	L'opposé de $\dfrac{-7+3}{-5}$ est	$\dfrac{-4}{5}$	$\dfrac{10}{-5}$	2
8	Le résultat de $(-3)^2$ est	-6	9	-9
9	Le résultat de -3^2 est	-6	9	-9
10	L'opposée de l'inverse du double du carré de -2 vaut	$0,125$	8	2

16.1.3 Q.C.M. 3 : Puissance, calcul littéral, équations

	Proposition	A	B	C
1	$5^3 \times 5^2$ est égal à	5^5	5^6	5^1
2	$\dfrac{2^{-8}}{2^{-7}}$ est égal à	2^{-15}	2^1	$0,5$
3	$\dfrac{3^{-2} \times 5^{-2}}{15^{-8} \times 15^5}$ est égal à	$0,125$	$\dfrac{6^{-4}}{15^3}$	15
4	La notation scientifique de : $10^3 \times 56,789 \times 10^{-7}$ est	$5,6789$	$5,6789 \times 10^3$	$5,6789 \times 10^{-3}$
5	La forme développée de : $2x(-3+x)$ est	$2x^2 - 6x$	$-6x^2$	$-6x$
6	La forme développée de : $(x-5)(-x+5)$ est	$-x^2 - 10x - 25$	$-x^2 + 10x - 25$	$25x$
7	La forme développée de : $(-2x+3)(x-5) - (13x+15)$ est	$-2x^2 - 30$	$-2x^2 + 13x - 15$	$-2x^2 - 13x + 15$
8	Une solution de $3x + 5 = -4$ est	-3	$\dfrac{-1}{3}$	3
9	Si $x = -2$ alors $3x^2 - 2x + 5$ vaut	21	-3	13
10	la solution de l'inéquation : $-5x + 8 \geqslant 11$ est	$x < -0,6$	$x \geqslant 0,6$	$x \leqslant -0,6$

16.2 Réponses de la partie révisions

16.2.1 Q.C.M. 1 : Fraction, inverse et priorité

	Proposition	**A**	**B**	**C**
1	Le résultat de $\frac{14}{6} \times \frac{2}{7}$ est	$\frac{2}{3}$	$\frac{28}{42} = \frac{2}{3}$	
2	L'inverse de $\frac{15}{12}$ est			$\frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0,8$
3	Le résultat de $\frac{14}{6} + \frac{10}{6}$ est	$\frac{24}{6} = 4$		
4	Le résultat de $12 : \frac{2}{3}$ est $12 \times \frac{3}{2}$			$\frac{12 \times 3}{2} = 18$
5	Le résultat de $-3 + \frac{4}{5}$ est $\frac{-3}{1} + \frac{4}{5}$		$\frac{-11}{5} = -2,2$	
6	Le résultat de $\frac{15}{12} : 3$ est $\frac{15}{12} \times \frac{1}{3}$		$\frac{5}{12}$	
7	Le résultat de $\frac{7}{6} - \frac{2}{9}$ est $\frac{21}{18} - \frac{4}{18}$	$\frac{17}{18}$		
8	Le résultat de $\frac{-10}{8} : \frac{3}{4}$ est $\frac{-10}{8} \times \frac{4}{3}$			$\frac{-5}{3}$
9	Le résultat de $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ est	1		
10	Le résultat de $\frac{\frac{14}{6} + \frac{2}{7}}{\frac{14}{6} - \frac{2}{7}}$ est		$\frac{55}{43}$	

16.2.2 Q.C.M. 2 : Signe, produit, opposé

	Proposition	A	B	C
1	Le résultat de $(-2)\times(-3)\times(-4)$ est			-24
2	Le résultat de $(-2)+(-3)+(-4)$ est			-9
3	Le résultat de $(-2)-(-3+4)$ est	-3		
4	Le résultat de $-5-(-3+(5-6))$ est		-1	
5	Le résultat de $-13+18$ est		5	
6	L'opposé de $\dfrac{-17}{5}$ est		$\dfrac{17}{5}$	
7	L'opposé de $\dfrac{-7+3}{-5}$ est	$\dfrac{-4}{5}$		
8	Le résultat de $(-3)^2$ est		9	
9	Le résultat de -3^2 est			-9
10	L'opposée de l'inverse du double du carré de -2 vaut	$0,125$		

16.2.3 Q.C.M. 3 : Puissance, calcul littéral, équations

Proposition		A	B	C
1	$5^3 \times 5^2$ est égal à	5^5		
2	$\dfrac{2^{-8}}{2^{-7}}$ est égal à			$2^{-1} = 0,5$
3	$\dfrac{3^{-2} \times 5^{-2}}{15^{-8} \times 15^5}$ est égal à			15
4	La notation scientifique de : $10^3 \times 56,789 \times 10^{-7}$ est			$5,6789 \times 10^{-3}$
5	La forme développée de : $2x(-3+x)$ est	$2x^2 - 6x$		
6	La forme développée de : $(x-5)(-x+5)$ est		$-x^2 + 10x - 25$	
7	La forme développée de : $(-2x+3)(x-5) - (13x+15)$ est	$-2x^2 - 30$		
8	Une solution de $3x + 5 = -4$ est	-3		
9	Si $x = -2$ alors $3x^2 - 2x + 5$ vaut	21		
10	la solution de l'inéquation : $-5x + 8 \geqslant 11$ est			$x \leqslant -0,6$

16.3 Devoir maison

Devoir maison de mathématiques

bon courage

Exercice 1 : Calculer

$A = (-3) \times (-4) \times (-5)$ $B = (-3) + (-4) + (-5)$

$C = (-3) + (-4) \times (-5)$ $D = 2 + (-3 - (-4 - 5))$

Exercice 2 : Calculer

$E = \frac{21}{14} \div 3$ $F = -7 + \frac{15}{4}$ $G = \frac{7}{12} - \frac{6}{15}$

$H = \frac{-8}{15} \div \frac{4}{25}$ $I = \dfrac{\frac{7}{2} + \frac{3}{5}}{\frac{7}{2} - \frac{3}{5}}$

Exercice 3 :

Écrire le résultat sous la forme a^n où a et n sont des entiers :

$J = 7^{-12} \times 7^{15}$ $K = 3^{-4} \times 5^{-4}$

Donner la notation scientifique de :

$L = 0,00257 \times 10^2$ $M = 3^5$

Développer et réduire les expressions suivantes :

$N = x(6 - x)$ $O = (3 - x)(x - 5)$

$P = (x - 2)(x + 2) - (x^2 - 4)$

Barème : 4 — 7,5 — 2 - 2 - 4,5

16.4 Corrigé du devoir maison

Corrigé du devoir maison de mathématiques

Exercice 1 : Donne le résultat de

$A = (-3) \times (-4) \times (-5)$
$A = \boxed{-60}$

$B = (-3) + (-4) + (-5)$
$B = \boxed{-12}$

$C = (-3) + (-4) \times (-5)$
$C = (-3) + 20$
$C = \boxed{17}$

$D = 2 + (-3 - (-4 - 5))$
$D = 2 + (-3 - (-9))$
$D = 2 + (-3 + 9)$
$D = 2 + 6 = \boxed{8}$

Exercice 2 : Donne le résultat de

$$E = \frac{21}{14} \div 3 = \frac{21}{14} \times \frac{1}{3} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{7}}{2 \times \cancel{7}} \times \frac{1}{\cancel{3}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$F = -7 + \frac{15}{4} = \frac{-7}{1} + \frac{15}{4} = \frac{-28}{4} + \frac{15}{4} = \boxed{\frac{-13}{4}}$$

$$G = \frac{7}{12} - \frac{6}{15} = \frac{35}{60} - \frac{24}{60} = \boxed{\frac{11}{60}}$$

$$H = \frac{-8}{15} \div \frac{4}{25} = \frac{-8}{15} \times \frac{25}{4} = \frac{-2 \times \cancel{4}}{3 \times \cancel{5}} \times \frac{\cancel{5} \times 5}{\cancel{4}} = \boxed{\frac{-10}{3}}$$

$$I = \frac{\frac{7}{2} + \frac{3}{5}}{\frac{7}{2} - \frac{3}{5}} = \frac{\frac{35}{10} + \frac{6}{10}}{\frac{35}{10} - \frac{6}{10}} = \frac{\frac{41}{10}}{\frac{29}{10}} = \frac{41}{10} \times \frac{10}{29} = \boxed{\frac{41}{29}}$$

Exercice 3 :

Donne le résultat sous la forme a^n où a et n sont des entiers :

$J = 7^{-12} \times 7^{15} = 7^{-12+15} = \boxed{7^3}$

$K = 3^{-4} \times 5^{-4} = (3 \times 5)^{-4} = \boxed{15^{-4}}$

Donne la notation scientifique de :

$L = 0,00257 \times 10^2 = 2,57 \times 10^{-3} \times 10^2 = \boxed{2,57 \times 10^{-1}}$

$M = 3^5 = 243 = \boxed{2,43 \times 10^2}$

Développe et réduis les expressions suivantes :

$N = x(6 - x) = 6x - x^2$ ou $\boxed{-x^2 + 6x}$

$O = (3 - x)(x - 5) = 3x - 15 - x^2 + 5x = \boxed{-x^2 + 8x - 15}$

$P = (x - 2)(x + 2) - (x^2 - 4)$
$P = x^2 + 2x - 2x - 4 - (x^2 - 4)$
$P = x^2 + 2x - 2x - 4 - x^2 + 4 = \boxed{0}$

Chapitre 17

Annexe B : Propriétés et définitions pour la démonstration en géométrie

17.1 Les points

17.1.1 Démontrer qu'un point appartient à la médiatrice d'un segment

1) Avec la définition
On sait que MA=MB
or, si un point est équidistant des extrémités d'un segment alors il appartient à la médiatrice de ce segment
donc M appartient à la médiatrice de [AB].

17.1.2 Démontrer qu'un point est le milieu d'un segment

1) Avec la définition
On sait que $I \in [AB]$ et $IA = IB$
or, le milieu d'un segment est le point qui appartient à ce segment et qui est équidistant des extrémités de ce segment
donc I est le milieu de [AB].

2) Avec la symétrie centrale
On sait que A est le symétrique de B par rapport à I
or, deux points A et B sont symétriques par rapport à I lorsque I est le milieu de [AB]
donc I est le milieu de [AB].

3) Avec la médiatrice
On sait que (d) est la médiatrice de [AB] et (d) coupe [AB] en I
or, la médiatrice d'un segment est la droite qui coupe ce segment perpendiculairement en son milieu
donc I est le milieu de [AB].

4) Avec la médiane
On sait que ABC est un triangle et que la médiane issue de C coupe [AB] en I
or, la médiane d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui coupe le côté opposé à ce sommet en son milieu
donc I est le milieu de [AB].

5) Avec un parallélogramme
On sait que I est le point d'intersection des diagonales du parallélogramme ABCD
or, si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales ont le même milieu
donc I est le milieu de [AC] (et c'est aussi le milieu de [BD]).

6) Avec un cercle
On sait que [AB] est le diamètre du cercle de centre I
or, si un segment est un diamètre d'un cercle alors le centre de ce cercle est le milieu du segment

donc I est le milieu de [AB].

7) Avec un milieu et une parallèle (le théorème des milieux)
On sait que ABC est un triangle, J est le milieu de [AC] et la parallèle à (BC) passant par J coupe [AB] en I.
or, si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un deuxième côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu
donc I est le milieu de [AB].

17.1.3 Démontrer que des points sont alignés

1) Avec les angles (plats et nuls)
On sait que $\widehat{ABC}$ est un angle plat (ou nul)
or, si trois points A,B et C sont tels que $\widehat{ABC} = 180$ (ou 0°) alors les points A, B et C sont alignés
donc A, B et C sont alignés.

2) Avec des parallèles
On sait que B est un point commun de (AB) et (BC) et (AB)//(BC)
or, si deux droites sont parallèles et ont un point en commun alors elles sont confondues
donc A, B et C sont alignés.

3) Avec les distances
On sait que AB+BC=AC
or, si un point B vérifie AB+BC=AC alors il appartient au segment [AC]
donc A, B et C sont alignés.

4) Avec une Symétrie (centrale et axiale)
On sait que A', B' et C' sont les symétriques des points alignés A, B et C
or, si trois points sont alignés alors leurs symétriques sont alignés
donc A', B' et C' sont alignés.

17.2 Les droites

17.2.1 Démontrer que deux droites sont perpendiculaires

1) Avec une parallèle et une perpendiculaire
On sait que $(d_1)//(d_2)$ et $(d_3)\perp(d_2)$
or, si deux droites sont parallèles et une troisième est perpendiculaire à l'une alors elle est perpendiculaire à l'autre
donc $(d_1)\perp(d_3)$.

2) Avec une médiatrice
On sait que (d) est la médiatrice de [AB]
or, la médiatrice d'un segment est la droite qui coupe ce segment perpendiculairement en son milieu
donc $(d)\perp(AB)$.

3) Avec une hauteur
On sait que ABC est un triangle et (AH) est la hauteur issue de A
or, dans un triangle, une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet
donc $(AH)\perp(BC)$.

4) Avec une tangente à un cercle
On sait que (d) est la tangente en T au cercle de centre O
or, la tangente en T au cercle de centre O est la droite perpendiculaire à (OT) passant par T
donc $(d)\perp(OT)$.

5) Avec un triangle rectangle
On sait que ABC est un triangle rectangle en A
or, si un triangle est rectangle alors les deux côtés de l'angle droit sont perpendiculaires
donc $(AB)\perp(AC)$.

6) Avec un carré ou un rectangle
On sait que ABCD est un carré (*ou un rectangle*)

or, si un quadrilatère est un carré (*ou un rectangle*) alors deux côtés consécutifs de ce carré (ou rectangle) sont perpendiculaires
donc $(AB) \perp (BC)$.

7) Avec un losange
On sait que ABCD est un losange
or, si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires
donc $(AC) \perp (BD)$.

17.2.2 Démontrer que deux droites sont parallèles

1) Avec des milieux (Théorème des milieux)
On sait que ABC est un triangle et I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC]
or, si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté
donc $(IJ)//(BC)$.

2) Avec des longueurs et un triangle (Réciproque du théorème de Thalès)
On sait que A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre et de plus $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ (il faut absolument avoir montré cette égalité auparavant)
donc d'après le théorème de Thalès les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

3) Avec des parallèles
On sait que $(d_1)//(d_2)$ et $(d_1)//(d_3)$
or, si deux droites sont parallèles à une même droites alors elles sont parallèles
donc $(d_2)//(d_3)$.

4) Avec des perpendiculaires
On sait que $(d_1) \perp (d_2)$ et $(d_1) \perp (d_3)$
or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droites alors elles sont parallèles
donc $(d_2)//(d_3)$.

5) Avec une symétrie centrale
On sait que les droites (d) et (d') sont symétriques par rapport à un point
or, si deux droites sont symétriques par rapport à un point alors elles sont parallèles
donc $(d)//(d')$.

6) Avec certains quadrilatères (parallélogrammes : carrés, rectangles, losanges)
On sait que ABCD est un (*parallélogramme/rectangle/losange/carré*)
or, si un quadrilatère est un (*parallélogramme/rectangle/losange/carré*) alors ces côtés opposés sont parallèles
donc $(AB)//(CD)$.

7) Avec des angles (alternes-internes ou correspondants)
On sait que les angles alternes-internes (*ou correspondants*) $\widehat{yAv}$ et $\widehat{uBz}$ ont la même mesure
or, si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes (*ou correspondants*) de même mesure alors ces deux droites sont parallèles
donc $(xy)//(zt)$.

17.2.3 Démontrer qu'une droite est la médiatrice d'un segment

1) Avec la définition
On sait que sait que I est le milieu de [AB], $I \in (d)$ et $(d) \perp (AB)$
or, la médiatrice d'un segment est la droite qui coupe ce segment perpendiculairement en son milieu
donc (d) est la médiatrice de [AB].

2) Avec une symétrie axiale
On sait que les points A et B sont symétriques par rapport à la droite (d)
or, deux points A et B sont symétriques par rapport à une droite (d) lorsque celle-ci est la médiatrice du segment [AB]
donc (d) est la médiatrice de [AB].

3) Avec des distances égales
On sait que MA=MB et NA=NB
or, si un point est équidistant des extrémités d'un segment alors il appartient à la médiatrice de ce segment

donc M et N appartiennent à la médiatrice de [AB] et donc (MN) est la médiatrice de [AB].

17.2.4 Démontrer qu'une demi-droite est la bissectrice d'un angle

1) Avec la définition
On sait que les angles $\widehat{xOt}$ et $\widehat{tOy}$ ont la même mesure
or, la bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure
donc [Ot) est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

17.2.5 Démontrer que des droites sont concourantes

1) Dans un triangle (avec les médiatrices ou médianes ou hauteurs ou bissectrices)
On sait que (d_1), (d_2) et (d_3) sont les trois (*médiatrices/médianes/hauteurs/bissectrices*) du triangle ABC
or, les trois (*médiatrices/médianes/hauteurs/bissectrices*) d'un triangle sont concourantes, le point de concours est (le centre du cercle circonscrit/le centre de gravité/l'orthocentre/centre du cercle inscrit) du triangle ABC
donc (d_1), (d_2) et (d_3) sont concourantes.

17.3 Les triangles

17.3.1 Démontrer qu'un triangle est rectangle

1) Avec les longueurs (réciproque de Pythagore)
On sait que ABC est un triangle dont le plus grand côté est [BC] et on a calculé séparément les valeurs $AB^2 + AC^2$ et BC^2
or, si le carré du plus grand côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle
donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore ABC est rectangle en A.

2) Avec un cercle
On sait que ABC est un triangle inscrit dans le cercle de diamètre [BC]
or, si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre l'un de ses côtés alors ce triangle est rectangle et son hypoténuse est ce côté
donc ABC est rectangle en A.

3) Avec une médiane
On sait que ABC est un triangle et la médiane issue de A a pour longueur la moitié de BC
or, si la médiane relative à un côté d'un triangle a pour longueur la moitié de celle de ce côté alors ce triangle est rectangle
donc ABC est rectangle en A.

4) Avec la définition
On sait que ABC est un triangle tel que $\widehat{BAC} = 90$
or, un triangle rectangle est un triangle qui a un angle droit
donc ABC est rectangle en A.

5) Avec des angles (angles complémentaires)
On sait que ABC est un triangle tel que $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 90$
or, si un triangle a deux angles complémentaires alors c'est un triangle rectangle
donc ABC est rectangle en A.

17.3.2 Démontrer qu'un triangle est isocèle

1) Avec la définition
On sait que ABC est un triangle tel que AB=AC
or, un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés de même longueur
donc ABC est isocèle en A.

2) Avec des angles

On sait que ABC est un triangle tel que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$
or, si un triangle a deux angles de même mesure alors c'est un triangle isocèle
donc ABC est isocèle en A.

17.3.3 Démontrer qu'un triangle est équilatéral

1) Avec la définition
On sait que ABC est un triangle tel que AB=AC=BC
or, un triangle équilatéral est un triangle qui a trois côtés de même longueur
donc ABC est équilatéral.

2) Avec des angles
On sait que ABC est un triangle tel que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{BAC}$
or, si un triangle a trois angles de même mesure alors c'est un triangle équilatéral
donc ABC est équilatéral.

17.4 Les quadrilatères

17.4.1 Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

1) Avec la définition
On sait que (AB)//(CD) et (AD)//(BC)
or, un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles
donc ABCD est un parallélogramme.

2) Avec les diagonales (même milieu)
On sait que les diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD ont le même milieu
or, si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu alors ce quadrilatère est un parallélogramme
donc ABCD est un parallélogramme.

3) Avec toutes les longueurs des côtés
On sait que le quadrilatère non croisé ABCD est tel que AB=CD et BC=DA
or, si les côtés opposés d'un quadrilatère (non croisé) ont la même longueur alors ce quadrilatère est un parallélogramme
donc ABCD est un parallélogramme.

4) Avec deux longueurs et deux droites parallèles
On sait que le quadrilatère non croisé ABCD est tel que AB=CD et (AB)//(CD)
or, si un quadrilatère (non croisé) a deux côtés opposés parallèles et de même longueur alors ce quadrilatère est un parallélogramme
donc ABCD est un parallélogramme.

17.4.2 Démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle

1) Avec les angles
On sait que ABCD est un quadrilatère qui a trois angles droits
or, si un quadrilatère a trois angles droits alors c'est un rectangle
donc ABCD est un rectangle.

2) Avec les diagonales
On sait que ABCD est un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur
or, si un parallélogramme a ses diagonales qui ont la même longueur alors c'est un rectangle
donc ABCD est un rectangle.

3) Avec un angle
On sait que ABCD est un parallélogramme et $\widehat{ABC} = 90$
or, si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle
donc ABCD est un rectangle.

17.4.3 Démontrer qu'un quadrilatère est un losange

1) Avec la définition
On sait ABCD est un quadrilatère et AB=BC=CD=DA
or, un losange est un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur
donc ABCD est un losange.

2) Avec les diagonales
On sait que ABCD est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires
or, si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un losange
donc ABCD est un losange.

3) Avec un angle
On sait que ABCD est un parallélogramme tel que AB=BC (deux côtés consécutifs)
or, si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un losange
donc ABCD est un losange.

17.4.4 Démontrer qu'un quadrilatère est un carré

1) Avec le rectangle et losange
On sait que ABCD est à la fois un rectangle et un losange
or, si un quadrilatère est à la fois un rectangle et un losange alors c'est un carré
donc ABCD est un carré.

17.5 Triangles rectangles et cercles

1) Centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle
On sait que ABC est un triangle rectangle en A
or, si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour diamètre son hypoténuse
donc le centre du cercle circonscrit à ABC est le milieu de [BC].

17.6 Longueurs de segments et mesures d'angles

17.6.1 Calculer la longueur d'un segment ou démontrer que deux segments ont la même longueur

1) Avec une médiatrice
On sait que M appartient à la médiatrice du segment [AB]
or, si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment
donc MA=MB.

2) Avec une symétrie (centrale ou axiale)
On sait que [A'B'] est le symétrique de [AB] par rapport à une droite (d) (*ou un point O*)
or, si deux segments sont symétriques par rapport à une droite (*ou un point*) alors ils ont la même longueur
donc AB=A'B'.

3) Avec des médianes
On sait que ABC est un triangle, I est le milieu de [BC] (*donc (AI) est une médiane*)et G est le centre de gravité de ABC
or, dans un triangle le centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane en partant d'un sommet
donc $AG = \frac{2}{3} \times AI$.

4) Avec une médiane et un triangle rectangle
On sait que ABC est un triangle rectangle en A et I est le milieu de [BC]
or, dans un triangle rectangle la médiane relative à l'hypoténuse à pour longueur la moitié de celle de l'hypoténuse
donc $AI = \frac{BC}{2}$.

5) Avec un triangle rectangle (théorème de Pythagore)
On sait que ABC est un triangle rectangle en A dont on connait la longueur de deux côtés
or, d'après le théorème de Pythagore : le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés
donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

6) Avec un triangle rectangle et un angle (trigonométrie)
On sait que ABC est un triangle rectangle et on connait la *longueur* d'un côté et la *mesure* d'un angle
or $\cos(\widehat{angle}) = \frac{adjacent}{hypothenuse}$ $\sin(\widehat{angle}) = \frac{oppose}{hypothenuse}$ $\tan(\widehat{angle}) = \frac{oppose}{adjacent}$

donc *(calculs...)*.

7) Avec un triangle et une parallèle (théorème de Thalès)
On sait que les points A,M,B et A,N,C sont alignés et les droites (MN) et (BC) sont parallèles
or, d'après le théorème de Thalès les longueurs des côtés des triangles ABC et AMN sont proportionnelles
donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Sans oublier toutes les figures et leurs propriétés (parallélogramme, triangle isocèle, cercle,...)

17.6.2 Calculer la mesure d'un angle ou démontrer que deux angles ont la même mesure

On sait que [Ot) est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$
or, la bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure
donc $\widehat{xOt} = \widehat{tOy} = \frac{\widehat{xOy}}{2}$.

2) Avec deux droites sécantes (opposés par le sommet)
On sait que les angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{zOt}$ sont opposés pa le sommet
or, si deux angles sont opposés par le sommet alors ils ont la même mesure
donc $\widehat{xOy} = \widehat{zOt}$.

3) Avec un triangle (isocèle ou équilatéral)
On sait que ABC est un triangle isocèle en A(*ou équilatéral*)
or, si un triangle est isocèle (*ou équilatéral*) alors ses angles à la base ont la même mesure
donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

4) Avec deux droites parallèles (alternes-internes et correspondants)
On sait que les droites parallèles (d_1) et (d_2) forment deux angles alternes-internes (*ou correspondants*) $\widehat{yAv}$ et $\widehat{uBz}$
or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante alors les angles alternes-internes (*ou correspondants*) ont la même mesure
donc $\widehat{yAv} = \widehat{uBz}$.

5) Avec une symétrie
On sait que $\widehat{ABC}$ et $\widehat{A'B'C'}$ sont symétriques par rapport à une droite (d) (*ou un point O*)
or, si deux angles sont symétriques par rapport à une droite (*ou un point*) alors ils ont la même mesure
donc $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.

6) Avec un triangle et des angles (180°)
On sait que ABC est un triangle dont on connait la mesure de deux de ses angles
or, dans un triangle la somme des mesures des angles est égale à 180°
donc $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180$. (*et on peut trouver la mesure du troisième angle*)

7) Avec un triangle rectangle et des longueurs (trigonométrie)
On sait que ABC est un triangle rectangle et on connait la longueur de deux de ses côtés
or $\widehat{angle} = \cos^{-1}\left(\frac{adjacent}{hypothenuse}\right)$ $\widehat{angle} = \sin^{-1}\left(\frac{oppose}{hypothenuse}\right)$ $\widehat{angle} = \tan^{-1}\left(\frac{oppose}{adjacent}\right)$

donc *(calculs...)*.

8) Avec un cercle (angle au centre)
On sait que $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et $\widehat{AMB}$ est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$
or, le mesure d'un angle inscrit dans un cercle est la moitié de la mesure de l'angle au centre associé
donc $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

9) Avec un cercle (angles inscrits)

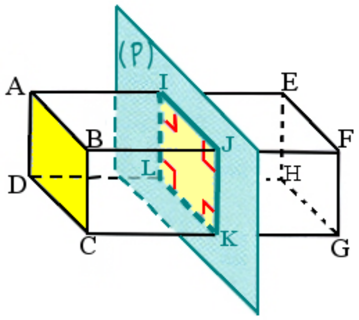
On sait que $\mathcal{C}$ est un cercle et que les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ inscrits dans $\mathcal{C}$ interceptent le même arc
or, si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc alors ils ont la même mesure
donc $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.

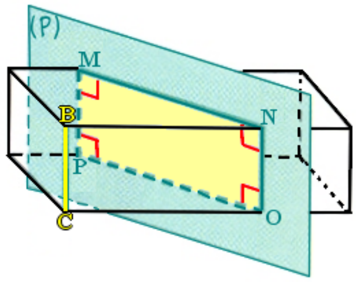
Sans oublier toutes les figures et leurs propriétés (parallélogramme, triangle isocèle, cercle,...)

17.7 Sections planes

1) Pavé et plan

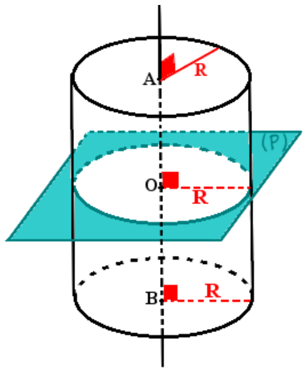
La section d'un pavé droit par un plan **parallèle** à une face ou une arête est un **rectangle**.



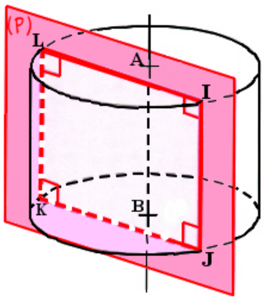


2) Cylindre et plan

La section d'un cylindre par un plan **perpendiculaire** à son axe est un **cercle**.

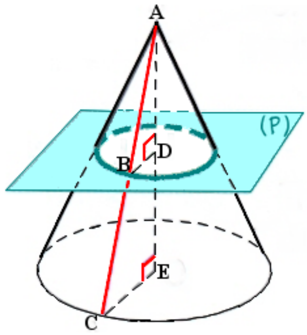


La section d'un cylindre par un plan **parallèle** à son axe est un **rectangle**.



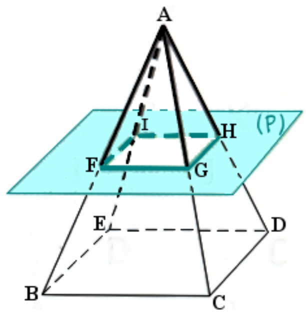
3) Cône et plan

La section d'un cône par un plan **parallèle** à sa base est un **cercle** qui est une réduction du cercle de sa base.



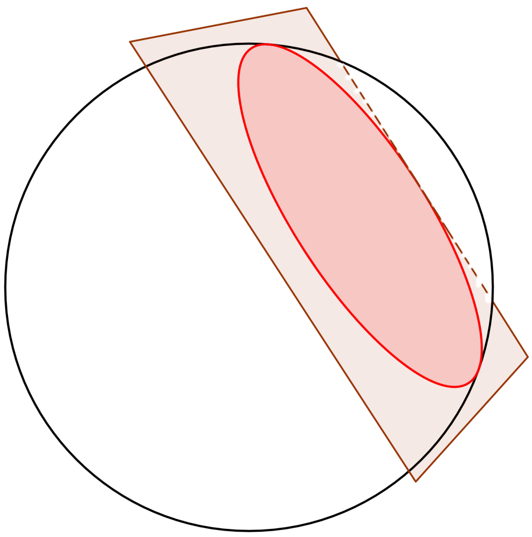
4) Pyramide et plan

La section d'une pyramide par un plan **parallèle** à sa base est une réduction de sa base.



5) Sphère et plan

La section d'une sphère par un plan est un **cercle**.



Chapitre 18

Annexe C : Formulaire

18.1 Rappels : unités

Tableau de conversion des unités de longueurs usuelles :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Tableau de conversion des unités d'aires usuelles :

<table>
<tr><td colspan="2">km^2</td><td colspan="2">hm^2</td><td colspan="2">dam^2</td><td colspan="2">m^2</td><td colspan="2">dm^2</td><td colspan="2">cm^2</td><td colspan="2">mm^2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>ha</td><td></td><td>a</td><td></td><td>ca</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

ha : hectare ($1ha = 1hm^2$)
a : are ($1a = 1dam^2$)
ca : centiare ($1ca = 1m^2$)

Tableau de conversion des unités de volumes usuels :

<table>
<tr><td colspan="3">km^3</td><td colspan="3">hm^3</td><td colspan="3">dam^3</td><td colspan="3">m^3</td><td colspan="3">dm^3</td><td colspan="3">cm^3</td><td colspan="3">mm^3</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>hL</td><td>daL</td><td>L</td><td>dL</td><td>cL</td><td>mL</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

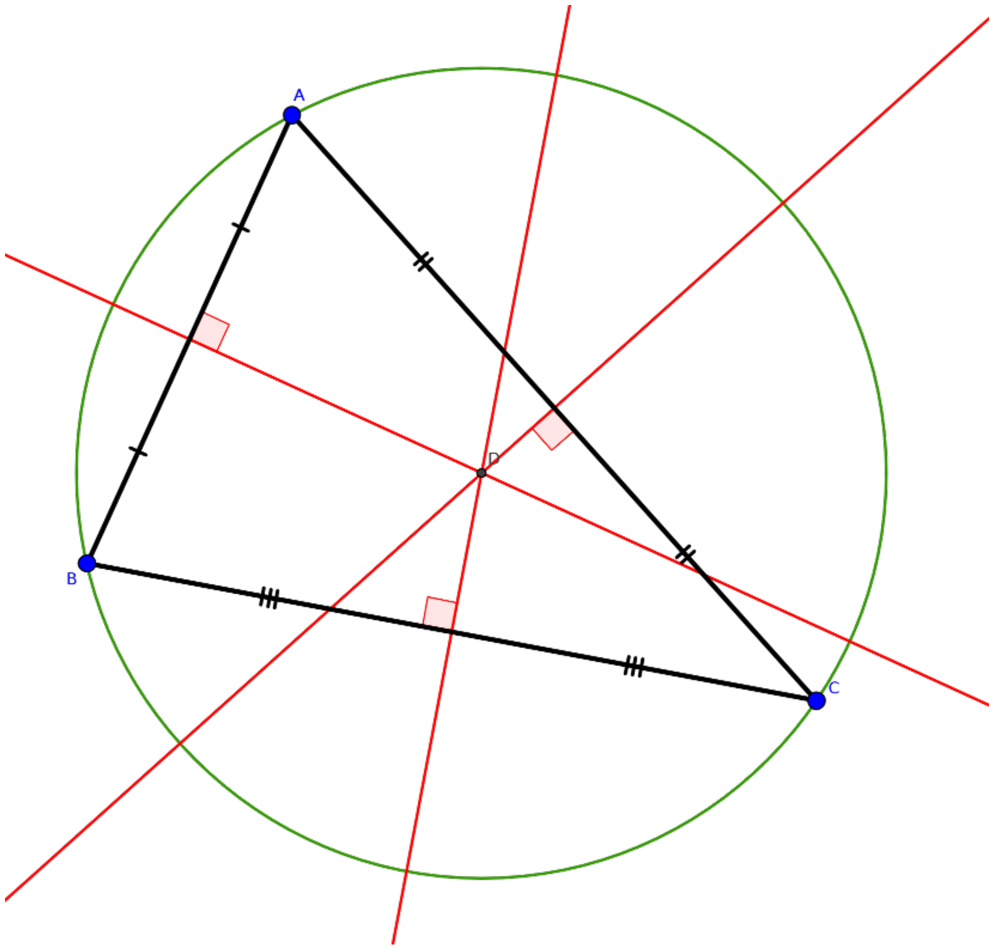
1 dm³ = 1 L
1 cm³ = 1 mL

18.2 Périmètres, aires, volumes

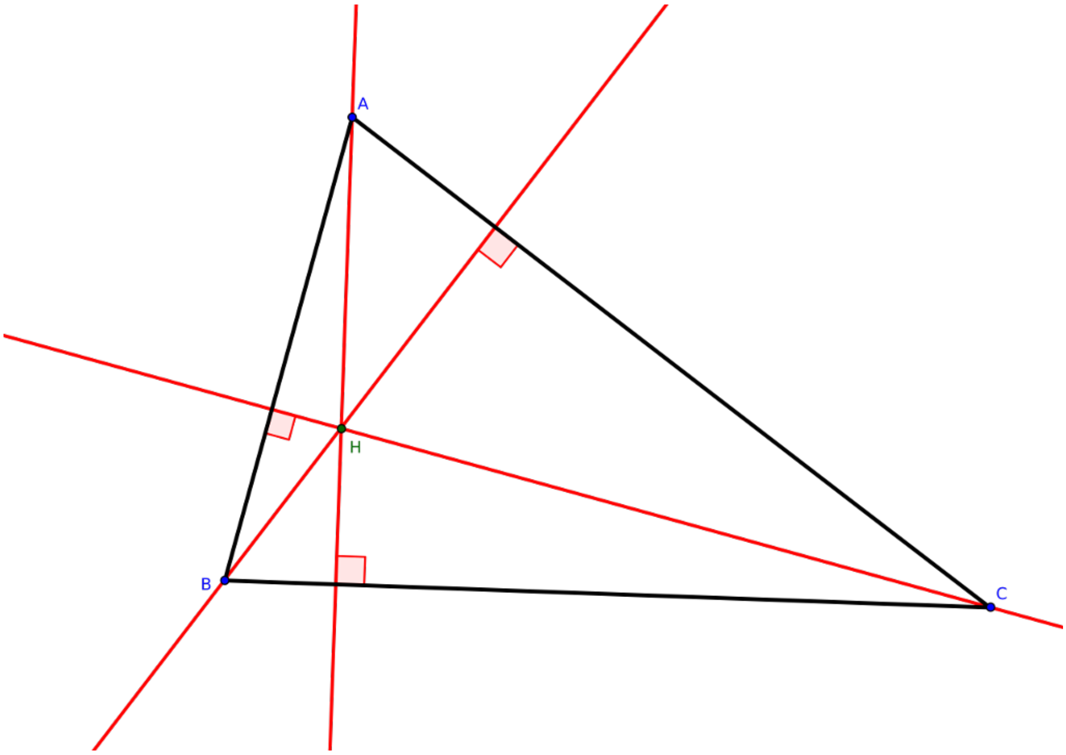
Figure	Périmètre	Aire	Volume
Carré(c : côté)	$4 \times c$	$c^2 = c \times c$	
Rectangle (L :Longueur, l :largeur)	$2L + 2l = 2(L + l)$	$L \times l$	
Losange (D et d : grande et petite diagonale)	$4 \times c$	$\frac{D \times d}{2}$	
Triangle (b : base et h : hauteur)		$\frac{b \times h}{2}$	
Parallélogramme (c : côté et h : hauteur)		$c \times h$	
Trapèze (B et b : grande et petite base)		$\frac{(B+b) \times h}{2}$	
Cercle (r : rayon)	$2 \times \pi \times r$		
Disque (r : rayon)		$\pi \times r^2$	
Pavé droit (L :Longueur, p :profondeur, h :hauteur)			$L \times p \times h$
Prisme droit (h : hauteur)		$\mathcal{A}_{laterale} = \mathcal{P}_{base} \times h$	$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{base} \times h$
Cylindre (h : hauteur, r : rayon de la base)		$\mathcal{A}_{laterale} = 2 \times \pi \times r \times h$	$\mathcal{V} = \pi \times r^2 \times h$
Pyramide (h : hauteur)			$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_{base} \times h}{3}$
Cône (h : hauteur, r : rayon de la base)			$\mathcal{V} = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$
Sphère (r : rayon)		$\mathcal{A} = 4 \times \pi \times r^2$	
Boule (r : rayon)			$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$

18.3 Droites remarquables dans un triangle

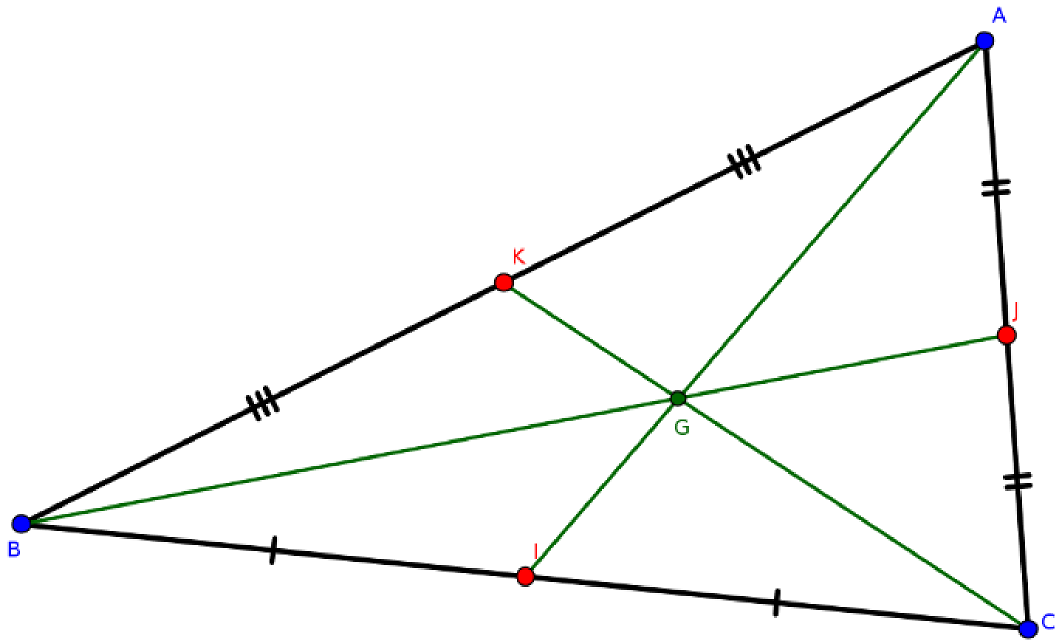
Dans un triangle, les **médiatrices** des trois côtés sont concourantes. Le point de concours est le **centre du cercle circonscrit**.



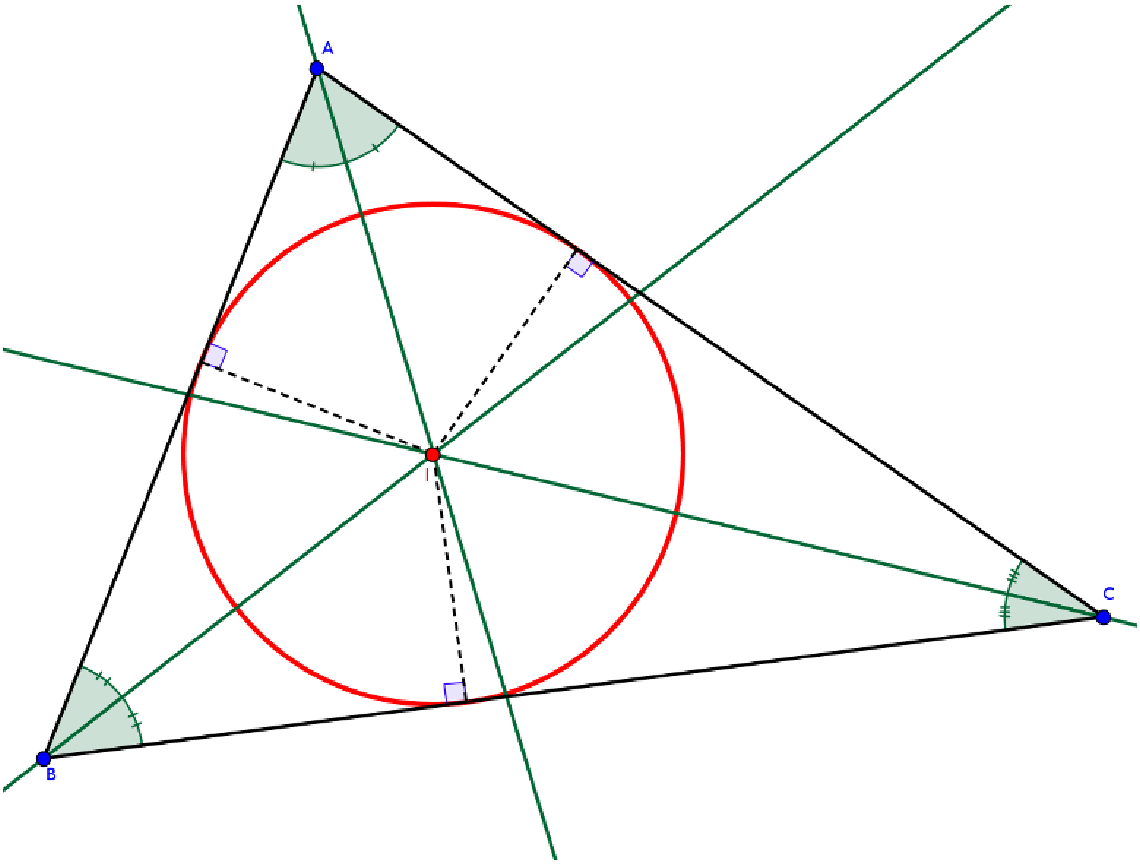
Dans un triangle les trois **hauteurs** sont concourantes. Le point de concours s'appelle l'**orthocentre**.



Dans un triangle les trois **médianes** sont concourantes. Le point de concours s'appelle le **centre de gravité**, il est situé aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet : $AG = \frac{2}{3}AI$.



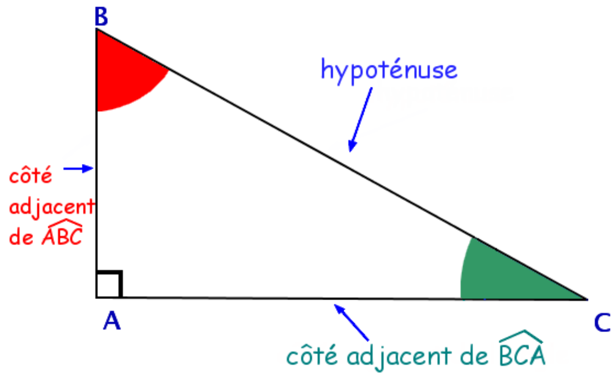
Dans un triangle les trois **bissectrices** sont concourantes. Le point de concours s'appelle le **centre du cercle inscrit**.



18.4 Trigonométrie

Si a est la mesure d'un angle aigu dans un triangle alors on a les formules suivantes :

$$\boxed{\cos(\mathbf{a}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}} \qquad \boxed{\sin(\mathbf{a}) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}} \qquad \boxed{\tan(\mathbf{a}) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}}$$



Si a est la mesure d'un angle aigu alors on a les formules suivantes :

$$\boxed{\cos^{\mathbf{2}}(\mathbf{a}) + \sin^{\mathbf{2}}(\mathbf{a}) = \mathbf{1}} \qquad \boxed{\tan(\mathbf{a}) = \frac{\sin(\mathbf{a})}{\cos(\mathbf{a})}}$$